

HÀM SỐ LIÊN TỤC

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

VẤN ĐỀ 1 : Hàm số liên tục tại một điểm.

BÀI 1 : Chứng minh rằng hàm số :

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

BÀI 2 : Xét tính liên tục của các hàm số sau tại một điểm cho trước :

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & (x < 2) \\ 2x + 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - x + 1}{x + 1} & \text{với } x < -1 \\ 4x + 9 & \text{với } x \geq -1 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+10} - x - 4}{x+2} & (x \neq -2) \\ -\frac{1}{4} & (x = -2) \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \left(x \geq \frac{3}{2} \text{ và } x \neq 2 \right) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2}{x-2} & x \neq 2 \\ \frac{1}{3} & x = 2 \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} & (2 \leq x \neq 3) \\ \frac{1}{2} & (x = 3) \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{2-x} & (x < 2) \end{cases}$$

$$7) f(x) = \frac{|x|}{1+x}$$

$$tại x = 0.$$

BÀI 3 : Xét tính liên tục của hàm số sau :

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ a & (x = 1) \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x^2 + 9} + 2x - 9}{2x - 6} & \text{với } x \neq 3 \\ a & \text{với } x = 3 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 2x^2 & (|x| < 2) \\ 5 & (x = 2) \\ 3x - 1 & (|x| > 2) \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{x-5} & \text{nếu } x > 5 \\ \frac{2x}{25} & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$$

BÀI 4 : Tìm giá trị của a để hàm số liên tục tại một điểm cho trước :

$$1) f(x) = \begin{cases} a + \frac{4-x}{x+2} & (x \geq 0) \\ \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & (x < 0) \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{nếu } x < 2 \\ m + \frac{1-x}{2+x} & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$$

$$BÀI 5 : \text{Tìm } m \text{ để hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{m^2}{2} - \frac{26}{3}x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$$

$$BÀI 6 : \text{Tìm } a \text{ và } b \text{ để hàm số } f(x) = \begin{cases} ax - 2b & \text{khi } x > 9 \\ \frac{ax - 2b - 12}{\sqrt[3]{x-1} - 2} & \text{khi } x < 9 \\ 12 & \text{khi } x = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} & x > 2 \\ mx + n & x = 2 \text{ liên tục tại } x = 2 \\ \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{x-2} - n & x < 2 \end{cases}$$

BÀI 7 : Tìm m, n để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} & x > 2 \\ mx + n & x = 2 \text{ liên tục tại } x = 2 \\ \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{x-2} - n & x < 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} + 2b & \text{khi } x > 3 \\ 8 & \text{khi } x = 3 \text{ liên tục tại } x = 3. \\ a \frac{x - 3}{\sqrt{12 - x} - 3} - 2b & \text{khi } x < 3 \end{cases}$$

BÀI 8 : Định a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 + |x - 1| \sqrt{5x^2 + 4} & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x + 1 & , \quad \text{liên tục tại } x_0 = 1. \\ a^2 + \frac{1}{3}x - 3a & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

BÀI 9 : Định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x - 3}{x^3 - 1} & (x < 1) \\ mx + \frac{1}{3} & (x = 1) \text{ liên tục tại } x = 1 \\ \frac{(m^2 - 1)x^2 + 4}{x + 2} & (x > 1) \end{cases}$

BÀI 10 : Tìm a và b để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+2x} \cdot \sqrt{1+3x}}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \text{ liên tục tại } x_0 = 0. \\ b + \frac{\sin 2x}{3x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 2 : Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn.

BÀI 12 : Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 & (x \geq 2) \\ \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & (-7 < x < 2) \end{cases}$ liên tục trên khoảng $(-7; +\infty)$.

BÀI 13 : Tìm các khoảng, nửa khoảng mà trên đó hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} & \text{khi } x > -2 \\ -3 & \text{khi } x = -2 \\ \sqrt{3+x} - 5 & \text{khi } -3 \leq x < -2 \end{cases}$ liên tục.

VẤN ĐỀ 2 : Hàm số liên tục trên R.

BÀI 14 : Tìm giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x} & (x < 2) \\ ax + a + 1 & (x \geq 2) \end{cases}$ liên tục trên R.

BÀI 15 : Tìm giá trị của a và b để hàm số : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} & (x > 2) \\ a & (x = 2) \text{ liên tục trên toàn trực số.} \\ bx + 1 & (x < 2) \end{cases}$

BÀI 16 : Tìm số thực a sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 & \text{nếu } x \leq 2 \\ (1-a)x & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên R.

LÝ THUYẾT HÀM SỐ LIÊN TỤC

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa : Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$. Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0 .

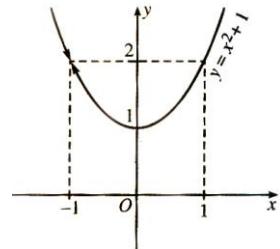
▪ Thí dụ 1 : Xét tính liên tục của hàm số : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \neq -1) \\ 2 & (x = -1) \end{cases}$ tại điểm $x = -1$.

▪ Giải : Ta có :

$$f(-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) = 2$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ nên hàm số f liên tục tại điểm $x = -1$.



▪ Thí dụ 2 : Xét tính liên tục của hàm số : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq 1) \\ x - 1 & (x > 1) \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

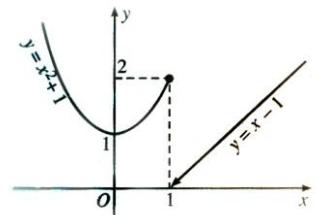
▪ Giải : Ta có :

$$f(1) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên hàm số f không liên tục tại điểm $x = 1$ (Hàm số f gián đoạn tại điểm $x = 1$).



II. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG, TRÊN MỘT ĐOẠN

Định nghĩa :

a) Giả sử hàm số f xác định trong tập hợp J , trong đó J là một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng. Ta nói rằng hàm số f liên tục trên J nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.

b) Hàm số f xác định trên đoạn $[a ; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

▪ Thí dụ 3 : Xét tính liên tục của hàm số : $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.

▪ Giải : Ta có :

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1 ; 1]$.

$\forall x_0 \in (-1 ; 1)$, ta có : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1 - x_0^2} = f(x_0)$ nên hàm số f liên tục trên khoảng $(-1 ; 1)$.

Mặt khác :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1)$$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1 ; 1]$.

▪ Thí dụ 4 : Xét tính liên tục của hàm số : $\begin{cases} x^3 + x + 1 & (x \geq 1) \\ 2x + 4 & (x < 1) \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

▪ Giải :

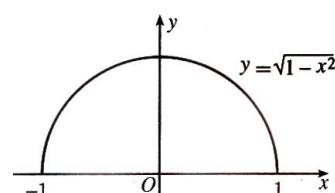
Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Trên khoảng $(-\infty ; 1)$, $f(x) = 2x + 4$ là hàm đa thức nên liên tục.

Trên khoảng $(1 ; +\infty)$, $f(x) = x^3 + x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục.

Tại điểm $x_0 = 1$, ta có :

$$\bullet f(1) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x + 1) = 3 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 4) = 6$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ không tồn tại nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Kết luận : Hàm số $f(x)$ đã cho liên tục trên $(-\infty ; 1)$ và trên $(1 ; +\infty)$ nhưng gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

• **Chú ý** : Tính liên tục của hàm số trên các nửa khoảng $[a ; b]$, $(a ; b]$, $[a ; +\infty)$, $(-\infty ; b]$, được định nghĩa tương tự như tính liên tục của hàm số trên một đoạn.

• **Nhận xét** :

a) Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng là đường liên tục trên khoảng đó.

a) Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương thì giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

b) Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng (tức là liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định của chúng).

Định lý 1 : Các hàm số lượng giác $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$ và $y = \cot x$ liên tục trên tập xác định của chúng.

III. TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lý : (Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = M$.

Ý nghĩa hình học của định lý :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a ; b)$.

Hệ quả : Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ý nghĩa hình học của hệ quả :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a ; b)$.

Cần nhớ : Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a ; b)$, ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : biến đổi phương trình thành dạng $f(x) = 0$.

Bước 2 : Chứng minh hàm số f liên tục trên $[a ; b]$.

Bước 3 : Tìm hai số a, b sao cho $f(a).f(b) < 0$.

Từ đó suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(a ; b)$.

▪ **Chú ý**

• Nếu $f(a).f(b) \leq 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a ; b]$.

• Để tìm được $f(a)$ và $f(b)$ thỏa $f(a).f(b) \leq 0$, chúng ta có thể dùng các kết quả sau :

+ Trong bốn số thỏa $f(a)f(b)f(c)f(d) \leq 0$ luôn có hai số có tích ≤ 0 .

+ Trong ba số thỏa $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ luôn có hai số có tích ≤ 0 .

• Có thể thay $f(a)$ hay $f(b)$ bởi giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khi đó, ta có :

+ Nếu hàm số f liên tục trên $[a ; +\infty)$ và có $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(a ; +\infty)$.

+ Nếu hàm số f liên tục trên $(-\infty ; a]$ và $f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-\infty ; a)$.

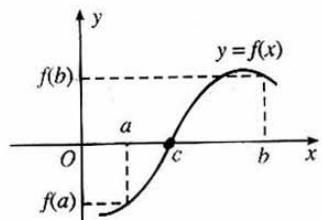
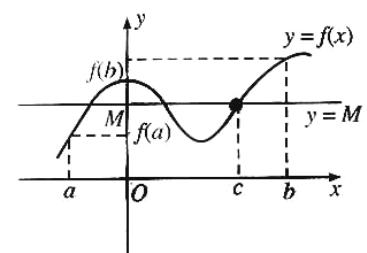
▪ **Thí dụ 5** : Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 1011x^2 + 0,5 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.

▪ **Giải** : Đặt $f(x) = x^3 + 1011x^2 + 0,5$

Hàm số $f(x)$ xác định trên R nên liên tục trên R .

Ta có $f(0) = 0,5 > 0$. Mặt khác vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại một số âm a sao cho $f(a) < 0$.

Vì $f(0).f(a) < 0$ nên theo hệ quả của định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực c thuộc khoảng $(a ; 0)$ sao cho $f(c) = 0$. Số $x = c$ là một nghiệm âm của phương trình đã cho.



CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

GVBМ : ĐOÀN NGỌC DŨNG

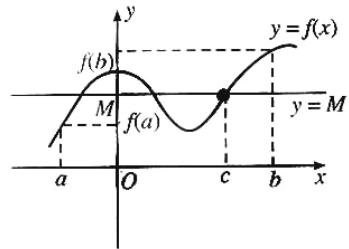
1. TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

- **Dịnh lý** : (Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = M$.

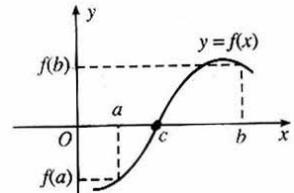
- **Ý nghĩa hình học của định lý** :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a ; b)$.



- **Hệ quả 1** : Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

- **Hệ quả 2** : Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.



- **Ý nghĩa hình học của hệ quả** :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a ; b)$.

2. PHƯƠNG PHÁP

Chứng minh phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm là một ứng dụng rất quan trọng của hàm số liên tục trên đoạn.

- **Cần nhớ** : Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a ; b)$, ta thực hiện các bước sau :

- Chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b) < 0$.

- **Phương pháp chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm**

- 1) **Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm, ta thực hiện các bước sau :**

Bước 1 : biến đổi phương trình thành dạng $f(x) = 0$.

Bước 2 : Tìm hai số a, b sao cho $f(a).f(b) < 0$.

Bước 3 : Chứng minh hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$.

Bước 4 : Kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a ; b)$.

- 2) **Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất n nghiệm, ta thực hiện các bước sau :**

Bước 1 : biến đổi phương trình thành dạng $f(x) = 0$.

Bước 2 : Tìm n cặp số a_i, b_i sao cho các khoảng $(a_i ; b_i)$ rời nhau và $f(a_i).f(b_i) < 0$, với $i = 1, 2, \dots, n$

Bước 3 : Chứng minh hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$.

Bước 4 : Kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_i \in (a_i ; b_i)$.

- **Chú ý 1** : Khi phương trình $f(x) = 0$ có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :

- $f(a), f(b)$ không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi (hoặc chỉ dương hoặc chỉ âm)
- Hoặc $f(a), f(b)$ chứa tham số nhưng tích $f(a).f(b)$ luôn âm.

- **Chú ý 2** :

- Nếu $f(a).f(b) \leq 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a ; b]$.

- Để tìm được $f(a)$ và $f(b)$ thỏa $f(a).f(b) \leq 0$, chúng ta có thể dùng các kết quả sau :

+ Trong bốn số thỏa $f(a)f(b)f(c)f(d) \leq 0$ luôn có hai số có tích ≤ 0 .

+ Trong ba số thỏa $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ luôn có hai số có tích ≤ 0 .

• Có thể thay $f(a)$ hay $f(b)$ bởi giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khi đó, ta có :

+ Nếu f liên tục trên $[a ; +\infty)$ và có $f(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(a ; +\infty)$.

+ Nếu f liên tục trên $(-\infty ; a]$ và $f(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-\infty ; a)$.

3. BÀI TẬP

BÀI 1 : Chứng minh rằng phương trình :

- 1) $2x^5 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm.
- 2) $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$ có nghiệm.
- 3) $x^5 + 2x^4 - 3x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm.
- 4) $(x - 199)^4 \cdot (x - 200)^3 + 2x - 399 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.
- 5) $4x^4 + 2x^2 + x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc $(-1; 1)$.
- 6) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng $(-2; 2)$.
- 7) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ vô nghiệm trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$ (tức là vô nghiệm khi $|x| > 2$).
- 8) $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm trong khoảng $(-2; 5)$.
- 9) $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có nghiệm dương.
- 10) $x^5 - 5x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.
- 11) $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 12) $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .
- 13) $x^3 - 2x^2 + 3x = 7$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2 .
- 14) $100x^3 - 10x - 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm âm.
- 15) $x^5 - \sqrt{26}x^2 + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.
- 16) $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; \pi)$.
- 17) $\cos x = x^2 + x$ có nghiệm.
- 18)** $x^5 - 5x^3 + x^2 + 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 19) $x^3 + 2018x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 20) $x^3 - 2018x^2 - 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.
- 21) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 22) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{2b}{3} - \frac{2}{3} = 0$ luôn có nghiệm.
- 23) $x^3 + 1011x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 24)** $x^4 - x - 3 = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1; 2)$ và $x_0 > \sqrt[7]{12}$.
- 25) $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 > \sqrt[3]{2}$.
- 26) $x^3 - 3x^2 - 1$ có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$. Không tính $f(\sqrt[5]{36})$; $f(1 + \sqrt[5]{36})$. Hãy chứng minh $x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$
- 27) $x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 thỏa mãn $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- 28)** $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x_0 \in [0; 1]$ biết $2a + 2b + 3c = 0$.
- 29) $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc $(0; 1)$ với $2a + 3b + 6c = 0$.
- 30) $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ và thỏa mãn $2a + 6b + 19c = 0$.
- 31) $\tan^2 x + b \tan x + c = 0$ thỏa $2a + 3b + 6c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

BÀI 2 : Chứng minh rằng phương trình :

- 1)** $m(x - 1)(x + 2) + 2x + 1 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 2) $m(x - 1)^{2018}(x - 3) + 2x - 5 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 3) $x^4 + mx^2 - (4m + 1)x + 3m - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m .
- 4) $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 5) $\cos x + m \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 6) $2 \sin x + \cos x + m \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .
- 7)** $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 8) $(m^2 + 1)(x^3 - 1) - 6 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực với mọi số thực m .

- 9) $(m^2 + 2m + 3)x^4 + 2x - 2 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 10) $(m^2 + m + 3)(x - 2) + 4 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 11) $2012x^{2012} + mx^{2013} - m^2x - 2010 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 12) $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .
- 13) $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 14)** $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ luôn có một nghiệm dương với mọi m .
- 15) $(m^2 - m + 3).x^{2018} - 2x - 4 = 0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m .
- 16) $(\sqrt{x-1})^3 + mx = m + 1$ luôn có một nghiệm lớn hơn 1.
- 17) $x^3 - 3x = m$ có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị của $m \in (-2; 2)$.
- 18) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x} = m$ với $m > 3$ là tham số, luôn luôn có nghiệm và nghiệm đó là duy nhất.
- 19) $|x|^3 - mx^2 + (m+1)|x| - 2 = 0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 20) $mx^4 + 2x^2 - x - m = 0$ luôn luôn có 2 nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

BÀI 3 :

- 1) Chứng minh rằng phương trình : $a\cos^4x + b\cos^3x - 2c.\cos x = 2a\sin^3x$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c .
- 2) Chứng minh rằng phương trình : $a.\sin 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm.
- 3) Chứng minh rằng phương trình : $ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a) = 0$ luôn có nghiệm.
- 4) Chứng minh rằng phương trình : $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$ luôn có nghiệm.
- 5) Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}m^2x^2 + 32$ (m là tham số). Chứng minh rằng : nếu $m < -2$ hay $m > 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa điều kiện $x_1 < 0 < x_2 < x_3$.
- 6) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ (1) và cho $m > 0$ thỏa $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$. Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(0; 1)$.
- 7) Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ đều liên tục trên $[0; 1]$ và $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình : $f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ luôn có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

BÀI 4 : Cho f là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và m, n là hai số dương tùy ý.

Chứng minh phương trình $f(x) = \frac{mf(a) + nf(b)}{m+n}$ có nghiệm thuộc $[a; b]$.

BÀI 5 : Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Chứng minh rằng với mọi dãy hữu hạn các số $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ đều thuộc đoạn $[a; b]$ thì phương trình :

$f(x) = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \dots + f(c_n)]$ luôn có nghiệm trong đoạn $[a; b]$.

4. CÁC VÍ ĐU

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng phương trình $2x^5 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm.

▪ **Hướng dẫn :**

Đặt $f(x) = 2x^5 + 3x + 2$, $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên \mathbb{R} (1)

Ta có:

$$f(-1) = -3 < 0.$$

$$f(0) = 2 > 0.$$

$$\Rightarrow f(-1)f(0) < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 0)$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng phương trình $(x-199)^4 \cdot (x-200)^3 + 2x - 399 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

▪ **Hướng dẫn :**

Đặt $f(x) = (x-199)^4 \cdot (x-200)^3 + 2x - 399$.

Hàm số f là hàm đa thức xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số f liên tục trên $[199, 200]$.

Ta có : $\begin{cases} f(199) = (199 - 199)^4 \cdot (199 - 200)^3 + 2 \cdot 199 - 399 = -1 \\ f(200) = (200 - 199)^4 \cdot (200 - 200)^3 + 2 \cdot 200 - 399 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(199) \cdot f(200) = (-1) \cdot 1 = -1 < 0$

\Rightarrow phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(199; 200)$

Vậy phương trình $(x - 199)^4 \cdot (x - 200)^3 + 2x - 399 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng $(-2 ; 2)$.

▪ Hướng dẫn :

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$

$$f(-2) = -3 < 0 ; f(0) = 1 > 0 ; f(1) = -3 < 0 ; f(2) = 5 > 0$$

$\Rightarrow f(-2) \cdot f(0) < 0$ nên phương trình có nghiệm $(-2; 0)$

$\Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$ nên phương trình có nghiệm $(0; 1)$

$\Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình có nghiệm $(1; 2)$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm trên khoảng $(-2 ; 2)$.

Ví dụ 4 : Chứng minh : phương trình $x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có : $\begin{cases} f\left(\frac{21}{10}\right) = \left(\frac{21}{10}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{21}{10}\right)^2 + 3 \cdot \frac{21}{10} - 7 = -0,259 \\ f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 7 = 11 \end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{21}{10}\right) \cdot f(3) = -0,259 \cdot 11 = -2,849 < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(\frac{21}{10}; 3\right)$.

Vậy phương trình : $x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2.

Ví dụ 5 : Chứng minh rằng phương trình $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0 ; \pi)$.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

\Rightarrow hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0 ; \pi]$. (1)

Mặt khác :

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(\pi) = \pi^2 \cos \pi + \pi \sin \pi + 1 = 1 - \pi^2 < 0$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc $(0 ; \pi)$.

Ví dụ 6 : Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2020x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = x^3 + 2020x^2 + 0,1$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có : $f(0) = 0,1 > 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại một số thực a sao cho $f(a) < 0$.

Vì $f(0) \cdot f(a) < 0$ nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (a ; 0)$ sao cho $f(c) = 0$.

$\Rightarrow x = c$ là một nghiệm âm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm âm.

▪ Cách khác :

Đặt $f(x) = x^3 + 2020x^2 + 0,1$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có: $f(0) = 0,1 > 0$; $f(-2222) = -997331367,9 < 0$

$\Rightarrow f(0) \cdot f(-2222) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2222 ; 0)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm âm.

Ví dụ 7 : Chứng minh rằng phương trình : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{2b}{3} - \frac{2}{3} = 0$ luôn có nghiệm.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{2b}{3} - \frac{2}{3}$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(-1) = -a + \frac{b}{3} - c + \frac{1}{3}; f(0) = -\frac{2b}{3} - \frac{2}{3}; f(1) = a + \frac{b}{3} + c + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(0) + f(1) = 0 \Rightarrow \text{trong ba số } f(0), f(1), f(-1) \text{ phải có hai số có tích } \leq 0$$

\Rightarrow phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng phương trình $m(x - 1)(x + 2) + 2x + 1 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = m(x - 1)(x + 2) + 2x + 1$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có: $f(1) = 3 > 0$; $f(-2) = -3 < 0$.

$$\Rightarrow f(1).f(-2) = 3.(-3) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 1)$.

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 9 : Cho phương trình $(m+1)(x^2+m)x^2 - (4x-3)(m^2+4m+3) = 0$ (1) với m là tham số. Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình (1) luôn có nghiệm x .

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = (m+1)(x^2+m)x^2 - (4x-3)(m^2+4m+3)$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$+ f(1) = -2(m+1) \text{ và } f(3) = 54(m+1)$$

$$\Rightarrow f(1).f(3) = -108(m+1)^2 \leq 0 \quad (\text{a})$$

$$+ f \text{ là hàm số liên tục trên đoạn } [1; 3] \quad (\text{b})$$

Từ (a) và (b) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [1; 3], \forall m \in \mathbb{R}$

Do đó phương trình (1) luôn có nghiệm x .

Ví dụ 10 : Chứng minh rằng $\forall m$ phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm.

▪ Hướng dẫn :

Điều kiện : $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Ta có: $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m \Leftrightarrow \sin x - \cos x - m \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m \cdot \sin x \cdot \cos x$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có :

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \text{ luôn có một nghiệm thuộc } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 11 : Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = (1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$, $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(-1) = -1 < 0; f(-2) = m^2 + 2 > 0, \forall m$$

$$\Rightarrow f(-1).f(-2) < 0 \text{ nên phương trình có nghiệm } (-2; -1)$$

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 12 : Chứng minh phương trình: $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ Hướng dẫn :

Xét hàm số $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(-3) = -44m^2 - 14 < 0, \forall m; f(0) = m^2 + 1 > 0, \forall m; f(1) = -2 < 0, \forall m; f(2) = m^2 + 1 > 0, \forall m$$

Do đó, ta có: $f(-3).f(0) < 0; f(0).f(1) < 0$ và $f(1).f(2) < 0$ với mọi m .

f liên tục trên các đoạn $[-3; 0], [0; 1]$ và $[1; 2]$.

Do đó tồn tại $x_1; x_2; x_3$ sao cho $-3 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Suy ra phương trình đã cho có ba nghiệm là: $x_1; x_2; x_3$.

Ví dụ 13: Chứng minh phương trình: $(\sqrt{x-1})^3 + mx = m+1$ luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

▪ **Hướng dẫn :**

Đặt $t = \sqrt{x-1}$, điều kiện: $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng: $f(t) = t^3 + mt^2 - t = 0$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $f(0) = -1 < 0$. Mặt khác: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$

Suy ra: $f(0).f(c) < 0$. Vậy phương trình $f(t) = 0$ luôn có nghiệm $t_0 \in (0; c)$, khi đó: $\sqrt{x-1} = t_0 \Leftrightarrow t_0^2 + 1 > 1$

Vậy với mọi m thì phương trình luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Ví dụ 14: Chứng minh rằng phương trình $mx^4 + 2x^2 - x - m = 0$ luôn luôn có 2 nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ **Hướng dẫn :**

• Xét $m = 0$. Phương trình trở thành: $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$: phương trình có 2 nghiệm.

• Xét $m \neq 0$. Phương trình trở thành: $x^4 + \frac{2}{m}x^2 - \frac{1}{m}x - 1 = 0$

Đặt $f(x) = x^4 + \frac{2}{m}x^2 - \frac{1}{m}x - 1$, hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$f(0) = -1 < 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại một số âm a sao cho $f(a) > 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại một số dương b sao cho $f(b) > 0$.

$\Rightarrow f(a).f(0) < 0$ và $f(0).f(b) < 0$

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có 2 nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 15: Chứng minh phương trình $\frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1} + mx = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi $m \in \mathbb{R}$.

▪ **Hướng dẫn**

Xét hàm số $\frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1} + mx = 0$ có tập xác định là \mathbb{R} (vì $x^2 + x + 1 > 0, \forall x$)

Hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(0) = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1} + mx \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1 - \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{m}{x^2} \right) = +\infty$$

\Rightarrow tồn tại một số a sao cho $f(a) > 0 \Rightarrow f(0).f(a) < 0$

\Rightarrow phương trình có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0; a) \Rightarrow x_0 > 0$.

Vậy phương trình luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 16: Chứng minh phương trình: $\cos^4 x + \cos^3 x - 2c \cdot \cos x = 2a \sin^3 x$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c .

▪ **Hướng dẫn :**

Xét hàm số $f(x) = \cos^4 x + \cos^3 x - 2c \cdot \cos x - 2a \sin^3 x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, ta có:

$$\bullet f \text{ liên tục trên } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad \bullet f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2a) \cdot (-2a) = -4a^2 \leq 0$$

Vậy phương trình $f(x)$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, do đó (1) có nghiệm với mọi a, b, c .

Ví dụ 17 : Chứng minh phương trình $\frac{x^{2017}}{a} + \frac{x^{2018}}{b} + \frac{1}{c} = 0$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thỏa $a, b, c \neq 0$ và $bc + ac + 2ab = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

▪ **Hướng dẫn**

Đặt $f(x) = \frac{x^{2017}}{a} + \frac{x^{2018}}{b} + \frac{1}{c}$ có tập xác định là \mathbb{R} (vì $a, b, c \neq 0$), $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(0) = \frac{1}{c}; f(1) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow f(0) + f(1) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = \frac{bc + ac + 2ab}{abc} = \frac{0}{abc} = 0$$

Do $c \neq 0$ nên $f(0) \neq 0$ nên $f(0)$ và $f(1)$ là hai số trái dấu nhau.

$\Rightarrow \exists x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Vậy phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Ví dụ 18 : Cho hàm số $f(x) = ax^4 + (b+1)x^3 + x^2 - 2x + c$.

a) Tính $f(-2) + 3f(0) + 4f(1)$ theo a, b, c .

b) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thực với mọi số thực a, b, c thỏa $5a - b + 2c = 0$ và $c \neq 0$

▪ **Hướng dẫn**

a) Tính $f(-2) + 3f(0) + 4f(1)$ theo a, b, c .

$$f(-2) = 16a - 8b + c; f(0) = c; f(1) = a + b + c$$

$$f(-2) + 3f(0) + 4f(1) = 16a - 8b + c + 3c + 4(a + b + c) = 20a - 4b + 8c$$

b) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thực với mọi số thực a, b, c thỏa $5a - b + 2c = 0$ và $c \neq 0$.

Ta có: $f(-2) + 3f(0) + 4f(1) = 4(5a - b + 2c) = 0$ và $f(0) = c \neq 0$

Nên: có hai trong ba giá trị $f(-2), 3f(0)$ và $4f(1)$ trái dấu

$\Rightarrow f(-2).f(0) < 0$ hoặc $f(-2).f(1) < 0$ hoặc $f(0).f(1) < 0$

Mà hàm số $f(x)$ là hàm số xác định, liên tục trên \mathbb{R}

Nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm

Ví dụ 19 : Chứng minh rằng phương trình: $a.\sin 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm.

▪ **Hướng dẫn :**

Đặt $f(x) = a.\sin 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x$

Hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$\text{Ta có: } f(0) = b + c; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a - b + 1; f(\pi) = b - c; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a - b - 1$$

$$\text{nên } f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \forall a, b, c$$

Do đó tồn tại 2 giá trị $p, q \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$ thỏa $f(p).(q) \leq 0$.

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 20 : Chứng minh rằng phương trình: $ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a) = 0$ luôn có nghiệm.

▪ **Hướng dẫn :**

Xét $f(x) = ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a)$ liên tục trên \mathbb{R} , ta có:

$$f(a) = bc(a-b)(a-c)$$

$$f(b) = ca(b-c)(b-a)$$

$$f(c) = ab(c-a)(c-b)$$

$$\Rightarrow f(0).f(a).f(b).f(c) = -a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = M$$

• Nếu $M = 0$ thì phương trình có nghiệm là $0, a, b$, hay b, c .

• Nếu $M < 0$ thì trong 4 số $f(0), f(a), f(b)$ và $f(c)$ phải có hai số trái dấu nhau.

Vậy phương trình luôn có nghiệm.

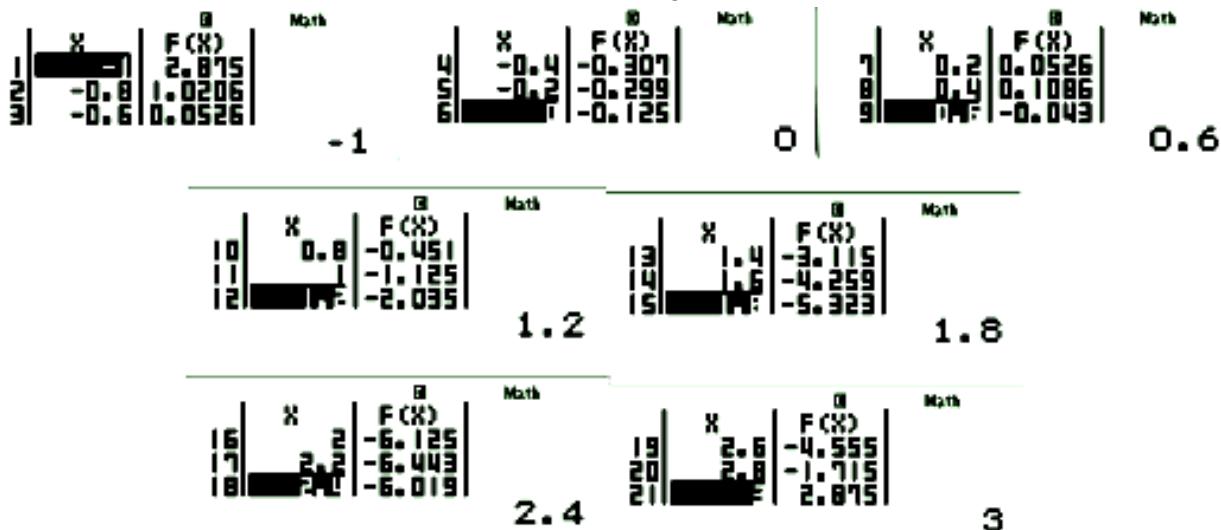
SỬ DỤNG MÁY TÍNH TRONG HÀM LIÊN TỤC

Câu 1: Cho phương trình $x^4 - 3x^3 + x - \frac{1}{8} = 0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

- A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1 ; 3)$.
- B. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1 ; 3)$.
- C. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm trên khoảng $(-1 ; 3)$.
- D. Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1 ; 3)$.

▪ **Hướng dẫn :** chọn D

Sử dụng chức năng Table và nhập: $f(X) = X^4 - 3X^3 + X - \frac{1}{8}$ và chọn: Start: -1 ; End: 3 ; Step: 0.2



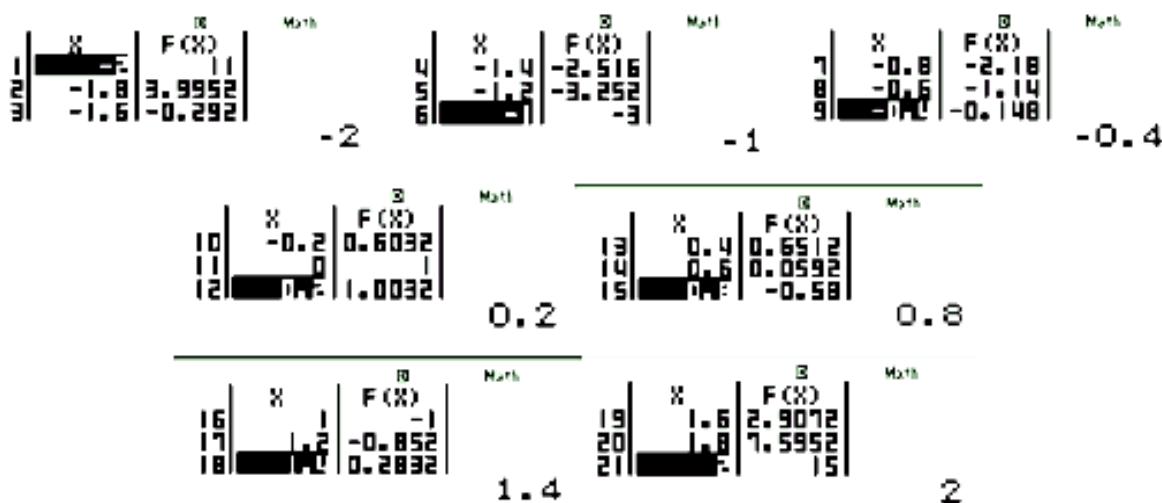
Quan sát kết quả ta thấy giá trị của $f(x)$ tại các điểm trong khoảng $(-1 ; 3)$ đổi dấu 4 lần. Mà phương trình bậc 4 thì có tối đa 4 nghiệm thực. Vậy phương trình có đúng 4 nghiệm thực phân biệt trên khoảng $(-1 ; 3)$. Do đó đáp án D là đúng.

Câu 2: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

- A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1 ; 1)$.
- B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2 ; 0)$.
- C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2 ; 1)$.
- D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0 ; 2)$.

▪ **Hướng dẫn :** chọn D

Sử dụng chức năng Table và nhập: $f(X) = 2X^4 - 5X^2 + X + 1$ và chọn: Start: -2 ; End: 2 ; Step: 0.2



Quan sát kết quả ta thấy trên khoảng $(-1 ; 1)$ phương trình có ít nhất 2 nghiệm, trên khoảng $(-2 ; 0)$ phương trình có ít nhất 2 nghiệm, trên khoảng $(-2 ; 1)$ phương trình có ít nhất 3 nghiệm, trên khoảng $(0 ; 2)$ phương trình có ít nhất 2 nghiệm. Do đó đáp án D là đúng.