

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

1

VẤN ĐỀ 1 : TÍNH GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1 : Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa AB và SC.

BÀI 2 : Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

ĐS : 1) 60° ; 2) 90° .

VẤN ĐỀ 2 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

BÀI 3 : Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh $AO \perp CD$.

BÀI 4 : Cho tứ diện ABCD có $DA = DB$ và $CA = CB$. Chứng minh rằng DC vuông góc với AB.

BÀI 5 : (SGK) Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và góc $ASB =$ góc $BSC =$ góc CSA . Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

BÀI 6 : (SGK) Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$ và góc $BAC = 60^\circ$, góc $BAD = 60^\circ$, góc $CAD = 90^\circ$.

a) Chứng minh $AB \perp CD$. b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

VẤN ĐỀ 3 : ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

BÀI 7 : Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông ở B.

a) Chứng minh đường thẳng $BC \perp (SAB)$. b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB . Chứng minh $AH \perp SC$.

c) Vẽ đường cao AK trong ΔSAC . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

d) Đường thẳng HK cắt BC tại I. Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

BÀI 8 : Cho hình chóp S.ABCD trong đó ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.

Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác vuông.

BÀI 9 : Cho hình thang vuông ABCD có đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 2a$, đường cao $AD = a$. Trên đường vuông góc với (ABCD) tại D lấy điểm S. Chứng minh các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

BÀI 10 : Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a$, góc $ASB = 90^\circ$, góc $BSC = 60^\circ$ và góc $ASC = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Chứng minh $SI \perp (ABC)$.

BÀI 11 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$. b) Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và $I \in (AHK)$.

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$, suy ra $HK \perp AI$.

BÀI 12 : Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC. Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.

c) Gọi G là trọng tâm của ΔACD và H ở trên cạnh SD sao cho $HD = 2HS$. Chứng minh $HG \perp (ABCD)$.

BÀI 13 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$ và $BD \perp (SAC)$.

b) Gọi K, I lần lượt là trung điểm của AB, SC. Chứng minh $IS = IC = ID$ và suy ra $IK \perp (SDC)$.

BÀI 14 : Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

1) AH, SK, BC đồng quy. 2) $SC \perp (BHK)$. 3) $HK \perp (SBC)$.

BÀI 15 : Cho ΔABC vuông tại B. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S. Vẽ $BH \perp AC$ tại H và $HK \perp SC$ tại K. HK kéo dài cắt d tại P. Chứng minh : $BH \perp (SAC)$ và $PC \perp (SHB)$.

BÀI 16 : Tứ diện OABC có cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là điểm thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho OH vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng :

1) Chứng minh ΔABC có 3 góc nhọn. 2) BC vuông góc với mặt phẳng (OAH).

3) H là trực tâm của tam giác ABC. 4) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

VẤN ĐỀ 4 : GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

BÀI 17 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$ vuông góc với đáy. Tính góc của : a) SC với (ABCD). b) SC với (SAB). c) SB với (SAC).

ĐS : a) 60° ; b) $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{7}}$; c) $\sin \beta = \frac{\sqrt{14}}{14}$

BÀI 18 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a tâm O và $SA \perp (ABCD)$. $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa :

a) SO và (ABCD). b) SC và (SAB). c) BD và (SAD). d) SB và (SAC).

ĐS : a) $\tan \alpha = 2$; b) góc (SC, (SAB)) = 30° ; c) góc (BD, (SAD)) = 45° ; d) $\sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{6}$

BÀI 19 : Cho hình chóp SABCD là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$ và $AB = BC = a$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa :

a) SC và (SAD). b) SD và (SAC). c) SB và (SAC). d) AC và (SCD).

ĐS : a) góc (SC, (SAD)) = 30° ; b) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{6}$; d) góc (AC, (SCD)) = 45°

BÀI 20 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA = a vuông góc với (ABCD). Tính góc giữa SB, CD và tính góc giữa đường thẳng SD và (SAB).

ĐS : a) góc (SB, CD) = 45° ; b) góc (SD, (SAB)) = 60° .

BÀI 21 : Tứ diện SABC có đáy là ΔABC vuông cân tại B. Cho $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tính góc tạo bởi SB và (SAC). ĐS : góc (SB, (SAC)) = 30° .

BÀI 22 : Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy. ĐS : 30° .

BÀI 23 : Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thang cân đáy lớn $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu của S trên (ABCD) là trung điểm I của AD. Tam giác SAD là tam giác đều.

a) Tính góc giữa SC và (ABCD). b) Gọi K là trung điểm của AB. Tính góc giữa SI và (SAB).
c) Tính góc giữa BD với (SAB). d) Tính góc giữa SA và (MBD).

ĐS : a) góc (SC, (ABCD)) = 60° ; b) $\tan \alpha = \frac{1}{2}$; c) $\tan \beta = 2$; d) $\sin \varphi = \frac{1}{4}$

BÀI 24 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD.

a) Chứng minh $MN // BD$ và $SC \perp (AMN)$

b) Gọi K = $SC \cap (AMN)$. Chứng minh tứ giác AMKN có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c) Cho $AB = a$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa SC và (ABCD) và góc giữa BD và (SBC).

ĐS : c) góc (SC, (ABCD)) = 60° ; b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

BÀI 25 : (THPT QG 2016) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC, đường thẳng A'B tạo với (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và chứng minh $A'B \perp B'C$.

▪ VẤN ĐỀ 5 : THIẾT DIỆN VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG

BÀI 26 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Dựng đường cao AH của ΔSAB . Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SB. Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

BÀI 27 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Dựng đường cao AH của ΔSAB . Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. $M_p(\alpha)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

BÀI 28 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 2a$.

1) Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc SC.

2) Tính diện tích của thiết diện.

ĐS : $S_{\Delta AHK} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{5}$

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC – KHOẢNG CÁCH

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

3

1. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

BÀI 1.1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O; AB = a ; SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SO = \frac{a}{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn AD, BC.

1) Chứng minh (SAC) \perp (SBD). 2) Chứng minh (SIJ) \perp (SBC). 3) Chứng minh (SAD) \perp (SBC).

BÀI 1.2 : Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA = SB = SC = a. Chứng minh :

1) Chứng minh : (ABCD) \perp (SBD). 2) Chứng minh tam giác SBD là tam giác vuông.

BÀI 1.3 : Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi ABCD với AB = a, AC = $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi, ta lấy điểm S sao cho SB = a. Chứng minh rằng tam giác ASC vuông và (SAB) \perp (SAD).

BÀI 1.4 : Tứ diện ABCD có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Trong ΔABC vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mp(ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của ΔACD

1) Chứng minh (ADC) \perp (ABE) và (ADC) \perp (DFK). 2) Chứng minh OH \perp (ACD)

BÀI 1.5 : Cho tứ diện ABCD có cạnh AD \perp (DBC). Gọi AE, BF là hai đường cao của ΔABC ; H và K lần lượt là trực tâm của ΔABC và ΔDBC . Chứng minh : (ADE) \perp (ABC); (BFK) \perp (ABC) và HK \perp (ABC).

BÀI 1.6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA \perp (ABCD). Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên hai cạnh BC, DC sao cho $BM = \frac{a}{2}$, $DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh (SAM) \perp (SMN).

BÀI 1.7 : Cho ΔABC đều cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng của A qua I. Dựng đoạn SD = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với (ABC). Chứng minh (SAB) \perp (SAC).

BÀI 1.8 : Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A lấy điểm S. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Hãy xác định mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?

BÀI 1.9 : Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cạnh SC, (α) cắt SC tại I.

1) Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α). 2) Chứng minh (SBD) \perp (SAC) và BD // (α).

3) Xác định giao tuyến d của (SBD) và (α). Tìm thiết diện cắt hình chóp S.ABCD bởi mặt phẳng (α).

BÀI 1.10 : Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có AB = 2a, AD = DC = a, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a.

1) Chứng minh (SAD) \perp (SCD), (SAC) \perp (SCB). 2) Gọi φ là góc giữa (SBC) và (ABCD), tính tan φ .

3) Mặt phẳng (α) chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi (α) là hình gì ? Tính diện tích thiết diện này ?

BÀI 1.11 : (TRÍCH ĐH B 2012) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh (ABH) vuông góc với các mặt phẳng (SAC) và (SBC).

BÀI 1.12 : (TRÍCH ĐH A 2002) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN , biết rằng (AMN) \perp (SBC).

BÀI 1.13 : (TRÍCH ĐH B 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = a $\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng (SAC) \perp (SMB).

BÀI 1.14 : (TRÍCH ĐH A 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, mặt bên SAD là tam giác đều và (SAD) \perp (ABCD). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh (SBP) \perp (AMN).

ĐS : 10) $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 12) S = $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

2. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

BÀI 2.1 : Cho hình vuông ABCD cạnh a, vẽ $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với (ABCD). Tính góc giữa 2 mặt phẳng

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| 1) (SAB) và (ABCD). | 2) (SBC) và (ABCD). | 3) (SBD) và (ABCD). | 4) (SAB) và (SCD). |
| 5) (SAB) và (SBC). | 6) (SAD) và (SCD). | 7) (SBC) và (SAD). | 8) (SBD) và (SAB). |
| 9) (SCD) và (ABCD). | 10) (SBD) và (SBC). | 11) (SBC) và (SCD). | |

BÀI 2.2 : Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy. | 2) Tính góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy. |
|---------------------------------------|---|

BÀI 2.3 : Cho tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính góc của hai mặt phẳng (SAJ) và (SCI).

BÀI 2.4 : Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mặt phẳng (ABC), góc $BAC = 120^\circ$, $AB = AC = a$, $SA = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và (ABC).

BÀI 2.5 : Tứ diện SABC có đáy là ΔABC vuông cân tại B. Cho $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) Tính góc tạo bởi SB và (SAC). | 2) Tính góc của hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). |
|----------------------------------|---|

BÀI 2.6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SC.

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) Chứng minh $AM \perp (SCD)$. | 2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). |
|----------------------------------|--|

BÀI 2.7 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau góc 60° .

BÀI 2.8 : (TRÍCH ĐH B 2004) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tan của góc giữa mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ .

ĐS : 1) 90° ; 60° ; $\tan S\hat{O}A = a\sqrt{6}$; 30° ; 2) 30° , $\tan S\hat{M}H = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3) 60° ; 4) 30° ; 5) 30° ; 6) 60° ; 7) $x = a$; 8) $a\sqrt{2} \tan \varphi$.

3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

BÀI 3.1 : Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) Chứng minh $IO \perp (ABCD)$. | 2) Tính $d(I, CM)$, từ đó suy ra $d(S, CM)$. |
|-----------------------------------|--|

BÀI 3.2 : Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$; M là một điểm thuộc AB sao cho $AM = \frac{2a}{3}$. Tính $d(S, CM)$.

BÀI 3.3 : (DBĐH 2002) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

ĐS : 1) $d(I, CM) = \frac{a\sqrt{30}}{10}$; $d(S, CM) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$; 2) $d(S, CM) = \frac{a\sqrt{110}}{5}$; 3) $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$

4. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

BÀI 4.1 : Cho tứ diện S.ABC có ΔABC vuông cân ở B; $AC = 2a$ và $SA = a$ vuông góc với (ABC). Gọi O là trung điểm của AC. Hãy tính $d(C, (SAB))$, $d(A, (SBC))$ và $d(O, (SBC))$.

BÀI 4.2 : (DBĐH 2002) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) theo a, biết rằng $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

BÀI 4.3 : Cho tứ diện ABCD có BCD là tam giác đều cạnh a, $AB \perp (BCD)$ và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm D đến (ABC) và tính khoảng cách từ điểm B đến (ACD).

BÀI 4.4 : (DBĐH 2004) Cho hình chóp S.ABC có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, góc ABC bằng 120° . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 4.5 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1) Tính khoảng cách từ B đến (SCD) | 2) Tính khoảng cách từ O đến (SCD). |
| 3) Tính khoảng cách từ trọng tâm G của ΔSAB đến (SAC). | |

BÀI 4.6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, góc A = 120° , BD = a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60° .

BÀI 4.7 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. mặt bên SAB là tam giác cân tại S và (SAB) vuông góc với (ABCD). Cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy góc 45° .

- 1) Tính chiều cao của hình chóp S.ABCD.
 - 2) Tính khoảng cách từ chân đường cao hình chóp đến (SCD)

3) Tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng trung trực của cạnh BC.

BÀI 4.8 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, đường chéo AC = a. SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ; góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm AB. Hãy tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC) theo a.

BÀI 4.9 : (DBDH 2003) Cho hình chóp đều S.ABC, đáy ABC có cạnh bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 4.10 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SAC$ và khoảng cách từ G đến mặt bên SCD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên (SCD).

BÀI 4.11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân với $AB = 3a$, $AC = a\sqrt{7}$, $CD = a$. Các mặt bên (SAB) , (SBC) , (SAD) cùng hợp với đáy một góc 60° . Tính $d(S, (ABCD))$ theo a .

$$\underline{\text{DS}} : 1) a\sqrt{2}; \frac{a\sqrt{6}}{3}; \frac{a\sqrt{6}}{6}; 2) \frac{a\sqrt{2}}{2}; 3) \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{21}}{7}; 4) \frac{3a}{\sqrt{22}}; 5) \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{6}; 6) \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 7) \frac{a\sqrt{5}}{2}; \frac{a\sqrt{5}}{3}; \frac{3a^2\sqrt{5}}{16}; 8) \frac{3a\sqrt{13}}{26}; 9) \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \varphi; 10) \frac{a\sqrt{3}}{4}; 11) \frac{3a}{2}.$$

BÀI 4.12 : (TRÍCH ĐH D 2002) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

BÀI 4.13 : (TRÍCH ĐH D 2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc BAD bằng 120° . Gọi M là trung điểm của BC và góc SMA bằng 45° . Tính khoảng cách từ D đến (SBC).

BÀI 4.14 : (TRÍCH ĐH D 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, góc ABC = góc BAD = 90°, BA = BC = a, AD = 2a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh ΔSCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

BÀI 4.15 : (TRÍCH ĐH A 2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và ($ABCD$) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AD . Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với ($ABCD$). Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 4.16 : (TRÍCH ĐH D 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và góc $SBC = 30^\circ$. Tính $d(B, (SAC))$ theo a.

BÀI 4.17 : (TRÍCH ĐH A, A1 2013) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A. góc ABC bằng 30° , SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

BÀI 4.18 : (TRÍCH ĐH B 2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính $d(A, (SCD))$ theo a .

BÀI 4.19 : (ĐH D 2009) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

BÀI 4.20 : (ĐH B 2014) Cho lăng trụ ABCD.A₁B₁C₁D₁ có đáy ABCD là hình chữ nhật. AB = a, AD = a $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A₁ trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD₁A₁) và (ABCD) bằng 60° . Tính d(B₁, (A₁BD)) theo a.

BÀI 4.21 : (CĐ A 2007) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a.

BÀI 4.22 : (CĐ 2014) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

BÀI 4.23 : (DBDH 2007) Cho hình chóp SABC có góc $(SBC, ABC) = 60^\circ$, ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến (SAC).

BÀI 4.24 : (DBDH 2007) Cho lăng trụ đứng ABCA₁B₁C₁ có AB = a, AC = 2a, AA₁ = $2a\sqrt{5}$ và góc BAC = 120° . Gọi M là trung điểm của cạnh CC₁. Chứng minh MB ⊥ MA₁ và tính khoảng cách từ A tới (A₁BM).

ĐS : 12) $\frac{6\sqrt{34}}{17}$; 13) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; 14) $\frac{a}{3}$; 15) $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$; 16) $\frac{6a\sqrt{7}}{7}$; 17) $\frac{a\sqrt{39}}{13}$; 18) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$; 19) $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$; 20) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
; 21) $\frac{6a}{5}$; 22) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; 23) $\frac{3a}{\sqrt{13}}$; 24) $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

5. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

BÀI 5.1 : Hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a. SA ⊥ (ABCD), SA = a. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng :

- 1) SB và CD. 2) SB và AD. 3) AB và SC. 4) SC và BD.

BÀI 5.2 : Hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

BÀI 5.3 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng đường cao và bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh (SMN) ⊥ (SCD) và tính khoảng cách giữa AB và SC.

BÀI 5.4 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O; cạnh AB = $a\sqrt{2}$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với điểm H của đoạn AO. Góc giữa SC với (ABCD) là 30° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

BÀI 5.5 : Hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và AB = a, BC = 2a; cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của cạnh AC.

- 1) Tính khoảng cách giữa AB và SM. 2) Tính khoảng cách giữa BC và SM.

BÀI 5.6 : Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của OA và BC, của AI và OC.

BÀI 5.7 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Biết hai đường chéo $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ cắt nhau tại O và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa CD, SA.

BÀI 5.8 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, BC = $a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAC), (SBD) cùng vuông góc với đáy. Điểm I thuộc đoạn SC sao cho $SC = 3IC$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI, SB biết AI vuông góc với SC.

BÀI 5.9 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Đường thẳng SD tạo với đáy ABCD một góc 60° . Gọi M là trung điểm AB. Biết $MD = \frac{3\sqrt{5}}{2}a$, mặt phẳng (SDM) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM theo a.

BÀI 5.10 : Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình thang vuông tại A và B. AB = BC = a; AD = 2a. SA ⊥ (ABCD), SA = $a\sqrt{6}$.

- 1) Chứng minh : (SBC) ⊥ (SAB) và (SCD) ⊥ (SAC).
- 2) Tính góc giữa (SCD) và (ABCD); góc giữa (SAB) và (SCD).
- 3) (α) là mặt phẳng chứa AD và vuông góc (SBC). Xác định và tính thiết diện do (α) cắt hình chóp.
- 4) By là đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại B. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) cắt By tại I. Tính diện tích ΔSID .

BÀI 5.11 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB.

- 1) Chứng minh SH \perp (ABCD).
- 2) Chứng minh rằng (SAB) \perp (SAD) và (SAB) \perp (SBC).
- 3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- 4) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD).
- 5) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng (SHC) \perp (SDI).
- 6) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SI và BD.

ĐS : 1) $a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{6}}{6}; 2) \frac{a\sqrt{3}}{3}; 3) \frac{2a\sqrt{5}}{5}; 4) \frac{2a\sqrt{5}}{5}; 5) \frac{2a\sqrt{5}}{5}; \frac{a\sqrt{5}}{5}; 6) \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{5}}{5}; 7) \frac{a\sqrt{3}}{2}; 8) \frac{4a}{\sqrt{33}}$; 9)

$$\frac{3\sqrt{15}a}{4}; 10) 60^\circ; 52^\circ 14'; S_{MNDA} = \frac{a^2(3+\sqrt{7})\cdot\sqrt{6}}{7}; S_{ASID} = 2a^2; 11) 60^\circ; 40^\circ 53'; \frac{a\sqrt{30}}{20}$$

BÀI 5.12 : (TRÍCH ĐH B 2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

BÀI 5.13 : (TRÍCH ĐH A 2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH \perp (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa DM và SC theo a.

BÀI 5.14 : (TRÍCH ĐH A, A1 2012) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

BÀI 5.15 : (TRÍCH ĐH A 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

BÀI 5.16 : (ĐH D 2008) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM, B'C.

BÀI 5.17 : (CĐ 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

BÀI 5.18 : (DBĐH 2002) Cho hình tứ diện đều ABCD, cạnh $a = 6\sqrt{2}\text{cm}$. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

BÀI 5.19 : (THPTQG 2015) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ACBD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ACBD) bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

ĐS : 12) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; 13) $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$; 14) $\frac{a\sqrt{42}}{8}$; 15) $\frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$; 16) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$; 17) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; 18) 6cm; 19) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

6. CÁC ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ II CỦA TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

BÀI 1 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2008-2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O, AB = 2a, các cạnh bên bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$.

- a) Tính khoảng cách từ S đến mp(ABCD).
- b) Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.
- c) Gọi I là trung điểm SA. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OI và CD.
- d) Gọi E là điểm đối xứng của D qua I, F là trung điểm của AE, K là trung điểm của BC. Chứng minh FK vuông góc với BD.

BÀI 2 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2009-2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD có cạnh a và tâm O, góc ACB = 60° , mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H là trung điểm AB.

- 1) Chứng minh : SH \perp (ABCD) và (SCD) \perp (SHC).
- 2) Tính khoảng cách từ H và từ O đến mặt phẳng (SCD).
- 3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

BÀI 3 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2010-2011) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, AB = a , BC = $2a$, AD = $3a$.

- a) Chứng minh BC \perp (SAB) và tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).
- b) Gọi I là điểm trên cạnh AD sao cho IA = 2ID. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCI) và (SAB).
- c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).
- d) Gọi E là giao điểm của BD và CI. Gọi α là mặt phẳng chứa đường thẳng SE và vuông góc với mặt phẳng (SAB). Xác định và tính diện tích thiết diện do α cắt hình chóp.

BÀI 4 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2011-2012) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy, $SA = AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm SB, G là trọng tâm tam giác ABC.

- a) Chứng minh AI \perp (SBC).
- b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC)
- c) Tính góc giữa SG và (SAB)
- d) Tính góc giữa (SBG) với (ABC).

BÀI 5 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2012-2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh $2a$, góc ABC bằng 60° , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$.

- a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).
- b) Tính khoảng cách từ A và từ B đến (SCD).
- c) Gọi K là trọng tâm tam giác SCD. Chứng minh : KA = KC = KD.
- d) Gọi (α) là mặt phẳng chứa OK và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Xác định và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt hình chóp ABCD.

BÀI 6 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2013-2014) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = $2a$, AD = $3a$.

Gọi H là điểm trên cạnh AD sao cho AH = a , SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = 2a\sqrt{2}$.

- a) Chứng minh CD \perp (SAD) và tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).
- b) Gọi I là trung điểm cạnh CD. Chứng minh ba mặt phẳng (SHB), (SHI) và (ABCD) vuông góc với nhau từng đôi một.
- c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBI) và (ABCD).
- d) AC cắt BH tại M ; tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBI).

BÀI 7 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2014-2015) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AD = $3BC$. Gọi M là điểm trên cạnh AB thỏa AM = $2MB$; N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD.

- a) Chứng minh đường thẳng NP song song với mặt phẳng (ABCD). Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (ABCD).
- b) Xác định thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp.
- c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng BD và song song với mặt phẳng (MNP).

Xác định giao điểm K của SC với mặt phẳng (α) và tính tỉ số $\frac{KC}{KS}$?

BÀI 8 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2015-2016)

- 1) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $AC = 2\sqrt{2}a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và AD, SH \perp (ABCD), SC tạo với đáy một góc 45° .
 - a) Chứng minh $(SAC) \perp (SHK)$. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAC).
 - b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCK) và (ABCD).
 - c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD).

2) Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' (là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều), cạnh đáy bằng a, $AA^9 = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng A'B với mặt phẳng (AA'C'C).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và AC.

BÀI 90 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2016-2017)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD), có $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là điểm đối xứng với A qua B.

a) Chứng minh rằng SO vuông góc với BC và (SCE) vuông góc với (SAC).

b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SCE).

c) Tính góc giữa SE và mặt phẳng (ABCD).

d) Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

BÀI 10 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2017-2018)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$, SH vuông góc với mặt đáy tại trung điểm H của cạnh AB và $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng (SBD) \perp (SHM).

b) Tính góc giữa (SAD) và (SBC).

c) Tính khoảng cách từ N đến (SAM) với N trung điểm SD theo a .

BÀI 11 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2018-2019)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Biết tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $AD = a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm AB.

a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD)

c) Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng HC và MD.

BÀI 12 : (KT HKII LÊ HỒNG PHONG 2019-2020)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AD. SA vuông góc mặt phẳng (ABCD).

Gọi M là trung điểm AD, N là trung điểm SD. Biết $SA = a\sqrt{3}$ và $AD = 2.AB = 2.BC = 2.CD = 2a$.

a) Chứng minh $AC \perp CD$.

b) Chứng minh tam giác SCD vuông.

c) Tính khoảng cách từ M đến (SCD).

d) Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BN.

----------

BÀI 1. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN – SỰ ĐỒNG PHẢNG CỦA CÁC VÉCTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN.

Các khái niệm véctơ, phép toán trên các véctơ, ... trong không gian được định nghĩa tương tự như trong hình học phẳng. Sau đây là một số kết quả thường dùng :

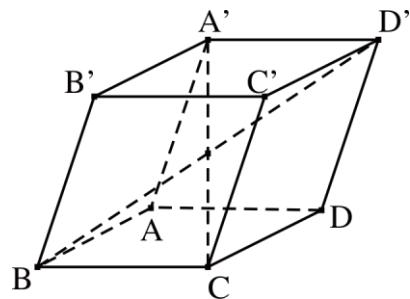
1) Phép cộng : Qui tắc ba điểm : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Qui tắc hình bình hành : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Qui tắc hình hộp : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

2) Nhân một số thực k với véctơ \vec{a} : $k\vec{a}$ là một véctơ :

- cùng phương với \vec{a}
- cùng hướng với \vec{a} (nếu $k > 0$), ngược hướng với \vec{a} nếu ($k < 0$)
- có độ dài $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$



3) Điều kiện cùng phương : \vec{a}, \vec{b} cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)

4) Tích vô hướng : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

II. SỰ ĐỒNG PHẢNG CỦA CÁC VECTƠ. ĐIỀU KIÊN ĐỂ BA VECTƠ ĐỒNG PHẢNG

1) Định nghĩa : Ba véctơ được gọi là *đồng phẳng* nếu giá của chúng *song song* với một mặt phẳng.

• Chú ý :

- Nếu ba véctơ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau thì đồng phẳng.
- Nếu một trong ba véctơ bằng $\vec{0}$ thì ba véctơ đồng phẳng.
- Nếu hai trong ba véctơ cùng phương thì cả ba véctơ đồng phẳng.

2) Điều kiện để ba véctơ đồng phẳng

Định lí 1 : Cho hai véctơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} . Khi đó : ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m, n sao cho : $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (các số m và n là duy nhất)

3) Hệ quả : Cho ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và không đồng phẳng. Nếu $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

4) Phân tích một véctơ theo ba véctơ không đồng phẳng

Định lí 2 : Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba véctơ không đồng phẳng thì với véctơ \vec{v} bất kì, ta đều tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{v} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. (các số m, n, p là duy nhất).

▪ CHỨNG MINH BA VECTƠ ĐỒNG PHẢNG – CHỨNG MINH BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẢNG

• Phương pháp giải :

- Dựa vào định nghĩa : chứng tỏ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có giá song song với một mặt phẳng
- Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng \Leftrightarrow có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, trong đó \vec{a} và \vec{b} là 2 vectơ không cùng phương.

• Chú ý : Khi chứng minh ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng, đường thẳng song song mặt phẳng ta thường sử dụng các kết quả sau :

a) \vec{a}, \vec{b} cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)

b) A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

c) Với \vec{a}, \vec{b} không cùng phương, ta có : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

d) A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$

e) A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ cùng vuông góc với véctơ $\vec{n} \neq \vec{0}$

f) Muốn chứng minh đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P), ta chứng minh \overrightarrow{AB} đồng phẳng với hai véctơ không cùng phương nằm trong (P).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

▪ VẤN ĐỀ 1 : TÍNH GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

- Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng :

▪ Cách 1 : Tìm góc giữa hai đường thẳng theo định nghĩa, tức là lấy điểm O tùy ý (ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng) qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho rồi tính góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

▪ Cách 2 : Tìm \vec{u}_1, \vec{u}_2 lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) khi đó :

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$$

• Phương pháp giải : Muốn tính góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ta có thể dựa vào công thức : $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$, và

từ đó suy ra góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Đặc biệt nếu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, ta có : góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 90^\circ$.

▪ VẤN ĐỀ 2 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

• Phương pháp giải : Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau, ta có thể chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ hoặc chứng minh góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90° .

▪ VẤN ĐỀ 3 : ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

- Phương pháp giải :

Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta có thể dùng một trong các cách sau :

- Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P).
- Chứng minh đường thẳng d song song với đường thẳng d' mà d' vuông góc với mặt phẳng (P).
- Chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (Q) mà mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P).

▪ VẤN ĐỀ 4 : GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

▪ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn hợp bởi đường thẳng đó và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng.

- Chú ý : – Khi đường thẳng d thuộc mặt phẳng (P) hoặc đường thẳng d // mặt phẳng (P) thì $(d, (P)) = 0^\circ$
– Khi đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P) thì $(d, (P)) = 90^\circ$

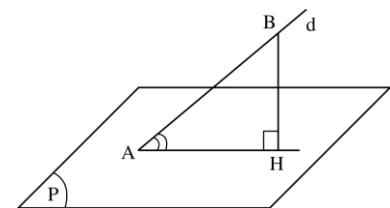
- Phương pháp giải :

Để tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta thực hiện các bước sau :

B1 : Tìm giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

B2 : Chọn điểm B ∈ d, và dựng BH ⊥ mặt phẳng (P) với H ∈ mặt phẳng (P).

B3 : Tính số đo của góc BAH dựa trên tỉ số lượng giác các góc nhọn trong tam giác vuông.



▪ VẤN ĐỀ 5 : THIẾT DIỆN VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG

▪ Để tìm thiết diện của khối đa diện (S) với mặt phẳng (P), biết mặt phẳng (P) qua điểm M cho trước và vuông góc với một đường thẳng (d) cho trước : ta tìm hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với đường thẳng (d), trong đó có ít nhất một đường thẳng qua M. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là mặt phẳng (P) phải tìm.

▪ Tìm thiết diện của một khối đa diện được tạo bởi một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng

Để làm được điều trên, ta cần nắm các định lý sau:

1) Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm M cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

$$2) \begin{cases} a \perp b \\ \text{mặt phẳng } (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \parallel \text{mặt phẳng } (\alpha) \\ a \subset \text{mặt phẳng } (\alpha) \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} a \perp b \\ \text{mặt phẳng } (\alpha) \perp b \\ M \in a \\ M \in \text{mặt phẳng } (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \subset \text{mặt phẳng } (\alpha)$$

BÀI 2.**HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC****I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẤT KÌ TRONG KHÔNG GIAN**

1) **Vectơ chỉ phương của đường thẳng**: Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ \vec{u} song song hoặc trùng với đường thẳng d.

- Nhận xét:

_ Nếu \vec{u} là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là vectơ chỉ phương của d.

_ Một đường thẳng d trong không gian được hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương \vec{u} của nó.

_ Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

2) **Góc giữa hai đường thẳng**:

Góc giữa hai đường thẳng a, b bất kì trong không gian được ký hiệu (a, b) hay (b, a) là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

- Nhận xét:

_ Nếu \vec{u}, \vec{v} lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a, b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .

_ Để tính góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} ta dựa vào công thức: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- **Định nghĩa**:

Hai đường thẳng a và b gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° . Nếu a và b là hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta ký hiệu $a \perp b$. Như vậy: $a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

• Nhận xét: Muốn chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau ta cần tìm các vectơ chỉ phương \vec{u}, \vec{v} của mỗi đường thẳng đó và chứng minh $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

III. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

• **Định lý**: Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai. ($a \parallel b$ và $c \perp a \Rightarrow c \perp b$)

- **Chú ý**:

1) Hai đường thẳng vuông góc trong không gian thì hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

2) Trong mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau, nhưng trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì không phải khi nào cũng song song với nhau.

BÀI 3**ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG**

CÁC ĐỊNH LÝ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
• <u>Định lý 1</u> : Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b, c cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì a vuông góc với mọi đường thẳng d nằm trong mp(P).		$a \perp b, a \perp c \quad b, c \subset (P) \quad b \cap c \neq \emptyset \Rightarrow a \perp d, \forall d \subset (P)$
• <u>Hệ quả</u> : Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì cũng vuông góc với cạnh thứ ba.		$a \perp AB, a \perp AC \Rightarrow a \perp BC$

<p>• Tính chất 1 : Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.</p>		$\left\{ \begin{array}{l} \text{điểm } O, \Delta \text{ cho trước} \\ \exists mp(P) \text{ qua } O \text{ và } mp(P) \perp \Delta \end{array} \right.$
<p>• Tính chất 2 : Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.</p>		$\left\{ \begin{array}{l} \text{điểm } O, mp(P) \text{ cho trước} \\ \exists \Delta \text{ qua } O \text{ và } \Delta \perp mp(P) \end{array} \right.$
<p>• Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng vuông góc với AB tại trung điểm O của đoạn thẳng AB.</p>		$\left\{ \begin{array}{l} O \text{ là trung điểm đoạn } AB \\ mp(P) \perp AB \text{ tại } O. \end{array} \right.$
<p>• Tính chất 3 :</p> <ol style="list-style-type: none"> Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau. 		$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ mp(P) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow mp(P) \perp b$ $\left. \begin{array}{l} a \perp mp(P) \\ b \perp mp(P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$ $a \not\equiv b$
<p>• Tính chất 4 :</p> <ol style="list-style-type: none"> Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau. 		$\left. \begin{array}{l} mp(P) \parallel mp(Q) \\ a \perp mp(P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp mp(Q)$ $\left. \begin{array}{l} mp(P) \perp a \\ mp(Q) \perp a \\ mp(P) \neq mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow mp(P) \parallel mp(Q)$
<p>• Tính chất 5 :</p> <ol style="list-style-type: none"> Cho đường thẳng a và mp(P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mp(P) thì cũng vuông góc với a. Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau. 		$\left. \begin{array}{l} a \parallel mp(P) \\ b \perp mp(P) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp a$ $\left. \begin{array}{l} a \not\subset mp(P) \\ a \perp b \\ mp(P) \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel mp(P)$
<p>• Định lý ba đường vuông góc Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong mp(P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên mp(P).</p>		<p>$b \subset mp(P)$ và a' là hình chiếu của a trên $mp(P)$). Nếu :</p> <ul style="list-style-type: none"> $b \perp a \Rightarrow b \perp a'$ $b \perp a' \Rightarrow b \perp a$
<p>• Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P). Góc giữa đường thẳng a và mp(P) là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên mp(P).</p>		<ul style="list-style-type: none"> $(a, mp(P)) = (a, a')$ $0^\circ \leq (a, (P)) \leq 90^\circ$ $(a, (P)) = 0^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (P) \end{cases}$ $(a, (P)) = 90^\circ \Leftrightarrow a \perp (P)$
<p>• Tìm thiết diện của một khối đa diện được tạo bởi một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng.</p>	$\left\{ \begin{array}{l} d \perp d' \\ mp(P) \perp d' \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d \parallel mp(P) \\ d \subset mp(P) \end{array} \right]$	$\left\{ \begin{array}{l} d \perp d' \\ mp(P) \perp d' \\ M \in d, M \in mp(P) \end{array} \right\} \Rightarrow d \subset mp(P)$

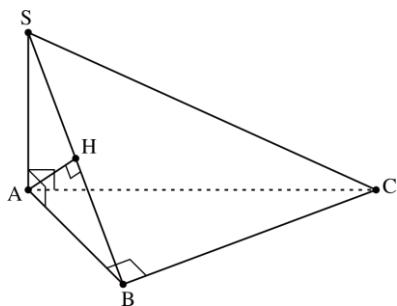
BÀI 4**HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC**

CÁC ĐỊNH NGHĨA - ĐỊNH LÝ - HỆ QUẢ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
<p>• Định nghĩa : Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.</p>		$\left. \begin{array}{l} a \perp mp(P) \\ b \perp mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = ((P), (Q))$ <p>• $0^\circ \leq (P, Q) \leq 90^\circ$</p> <p>• $(P, Q) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (P) \equiv (Q) \end{cases}$</p> <p>• $(P, Q) = 90^\circ \Leftrightarrow (P) \perp (Q)$</p>
<p>• Định lý 1 : Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt chiếu.</p>		$S' = S \cdot \cos \varphi$ <p>S là diện tích của ΔABC, S' là diện tích của $\Delta ABC'$ là hình chiếu của ΔABC trên $mp(P)$ và φ là góc giữa $mp(P)$ và $mp(ABC)$</p>
<p>• Định lý 2 : Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.</p>		$\left. \begin{array}{l} a \subset mp(P) \\ a \perp mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow mp(P) \perp mp(Q)$
<p>• Định lý 3 : Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.</p>		$\left. \begin{array}{l} mp(P) \perp mp(Q) \\ mp(P) \cap mp(Q) = c \\ a \subset mp(P) \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp mp(Q)$
<p>• Hệ quả 1 : Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trên $mp(P)$ thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với $mp(Q)$ sẽ nằm trong $mp(P)$.</p>		$\left. \begin{array}{l} mp(P) \perp mp(Q) \\ A \in mp(P) \\ A \in a \\ a \perp mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset mp(P)$
<p>• Hệ quả 2 : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.</p>		$\left. \begin{array}{l} mp(P) \cap mp(Q) = a \\ mp(P) \perp mp(R) \\ mp(Q) \perp mp(R) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp mp(R)$
<p>• Hệ quả 3 : Qua một đường thẳng a không vuông góc với $mp(P)$ có một và chỉ một $mp(Q)$ vuông góc với $mp(P)$.</p>		$\left. \begin{array}{l} a \subset mp(Q) \\ a \not\subset mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! mp(P) \perp mp(Q)$

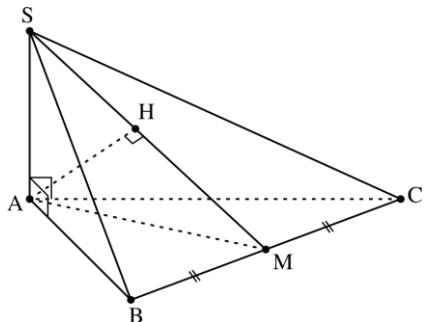
CÁC ĐỊNH NGHĨA - ĐỊNH LÝ - HỆ QUẢ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
<ul style="list-style-type: none"> Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng <p>Cho điểm M và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của M lên Δ. Độ dài đoạn thẳng MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ.</p>		<ul style="list-style-type: none"> MH là nhỏ nhất so với khoảng cách từ M đến mọi điểm của Δ. $MH = 0 \Leftrightarrow M \in \Delta$
<ul style="list-style-type: none"> Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng <p>Cho điểm O và mp(P). Gọi H là hình chiếu của O lên mp(P).</p> <p>Độ dài của đoạn thẳng OH được gọi là khoảng cách từ O đến mp(P)</p>		<ul style="list-style-type: none"> MH là nhỏ nhất so với khoảng cách từ M đến mọi điểm của mp(P) $MH = 0 \Leftrightarrow M \in mp(P)$
<ul style="list-style-type: none"> Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song <p>Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P).</p>		Nếu $a \parallel mp(P)$ thì $d(A ; mp(P)) = d(B ; mp(P))$
<ul style="list-style-type: none"> Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song <p>Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.</p>		Nếu $mp(P) \parallel mp(Q)$ thì $d(mp(P) ; mp(Q)) = d(A ; mp(Q)) = d(K ; mp(P))$
<ul style="list-style-type: none"> Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b <p>Đường thẳng c cắt cả a và b đồng thời vuông góc với cả a và b nên đường thẳng c là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.</p>		Nếu $\begin{cases} c \cap a = I \\ c \perp a = I \\ c \cap b = J \\ c \perp b = J \end{cases}$ thì c là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.
<ul style="list-style-type: none"> Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau. <p>Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng.</p>		$IJ \perp a \quad IJ \perp b \Rightarrow$ IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.
<ul style="list-style-type: none"> Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau <p>Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.</p>		a và b chéo nhau $\Rightarrow IJ = d(a ; b) = d(a ; mp(Q)) = d(b ; mp(P)) = d(mp(P) ; mp(Q))$ (IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b)

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

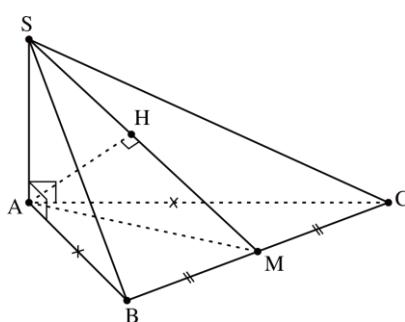
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là độ dài đoạn thẳng $AH \perp mp(P)$ với $H \in d$.
- Khoảng cách giữa một đường thẳng là một mặt phẳng song song với nó là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của đường thẳng đến mặt phẳng đó.
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.



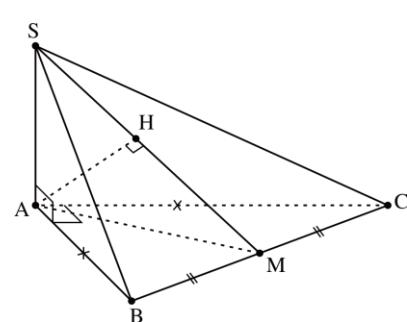
ĐÁY LÀ TAM GIÁC VUÔNG TẠI B



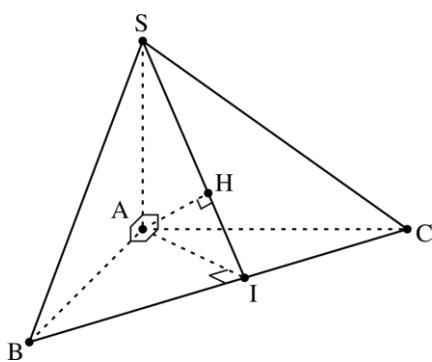
ĐÁY LÀ TAM GIÁC CÂN TẠI A



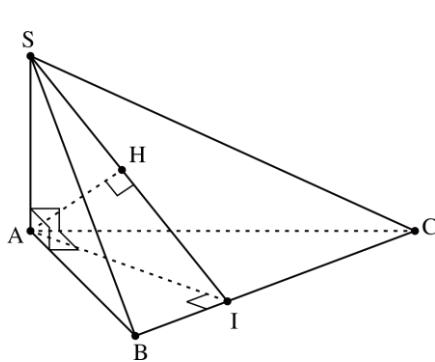
ĐÁY LÀ TAM GIÁC ĐỀU



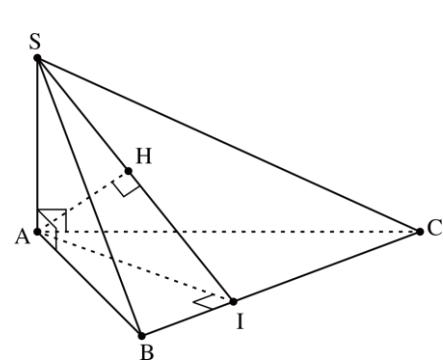
ĐÁY LÀ TAM GIÁC VUÔNG CÂN TẠI A



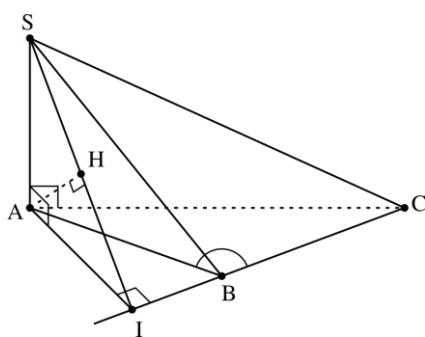
TỨ DIỆN VUÔNG



ĐÁY LÀ TAM GIÁC VUÔNG TẠI A



ĐÁY LÀ TAM GIÁC 3 GÓC NHỌN



ĐÁY LÀ TAM GIÁC CÓ MỘT GÓC TÙ TẠI B

I. MỘT SỐ LOẠI GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG THƯỜNG GẶP ĐỐI VỚI HÌNH CHÓP

17

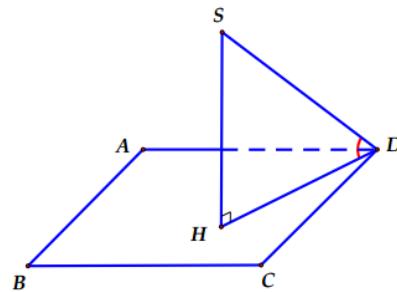
a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

- Tìm góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy $(ABCD)$

H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$

$\Rightarrow HD$ là hình chiếu vuông góc của SD trên $(ABCD)$

Vậy $\widehat{(SD, (ABCD))} = \widehat{(SD, HD)} = \widehat{SDH}$



b. Góc giữa cạnh bên và mặt đứng

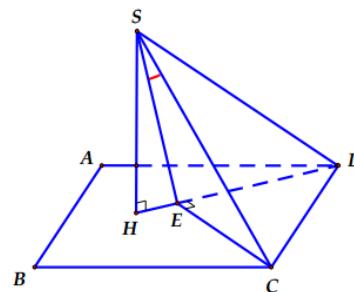
- Tìm góc giữa cạnh bên SC và (SHD) với $(SHD) \perp (ABCD)$

Dụng $CE \perp HD$ ($E \in HD$)

Vì $\begin{cases} CE \perp HD \\ CE \perp SH \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SHD)$

$\Rightarrow E$ là hình chiếu vuông góc của C trên (SHD) .

Vậy $\widehat{(SC, (SHD))} = \widehat{(SC, SE)} = \widehat{CSE}$.



c. Góc giữa đường cao và mặt bên

- Tìm góc giữa đường cao SH và mặt bên (SCD)

Dụng $HE \perp CD$ ($E \in CD$)

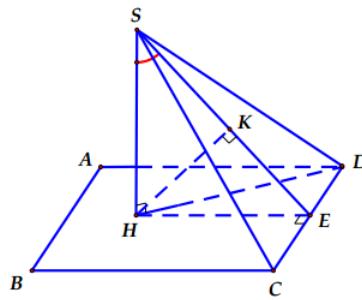
Vì $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow (SCD) \perp (SHE)$

Ta có: $(SCD) \cap (SHE) = SE$.

Dụng $HK \perp SE \Rightarrow HK \perp (SCD)$

$\Rightarrow SK$ là hình chiếu vuông góc của SH trên (SCD) .

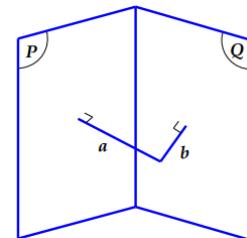
Vậy $\widehat{(SH, (SCD))} = \widehat{(SH, SK)} = \widehat{HSK}$



II. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) , ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1: Theo định nghĩa: $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(P), (Q)} = \widehat{(a, b)}$

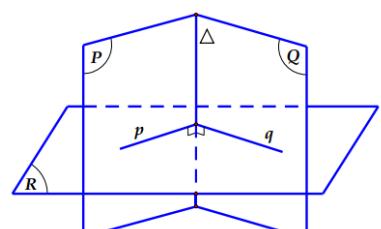


Cách 2: Khi xác định được $(P) \cap (Q) = \Delta$ thì ta làm như sau:

+ Bước 1: Tìm mặt phẳng $(R) \perp \Delta$.

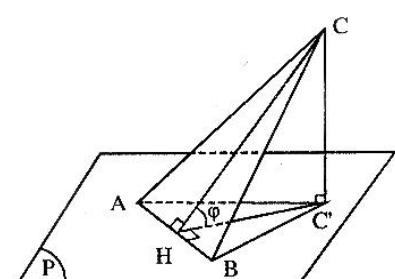
+ Bước 2: Tìm $\begin{cases} p = (R) \cap (P) \\ q = (R) \cap (Q) \end{cases}$

Khi đó: $\widehat{(P), (Q)} = \widehat{(p, q)}$.



Cách 3: Theo định lí về hình chiếu

$$S' = S \cdot \cos \varphi \Rightarrow \boxed{\cos \varphi = \frac{S'}{S}}$$

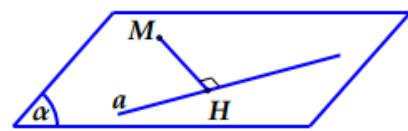


III. CÁC DẠNG KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

- Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a là MH , với H là hình chiếu của M trên đường thẳng a .

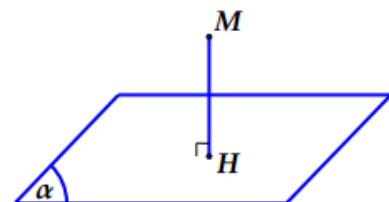
Kí hiệu: $d(M, a) = MH$.



- Dạng 2: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.**

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là MH , với H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α) .

Kí hiệu: $d(M, (\alpha)) = MH$.

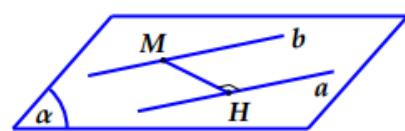


- Dạng 3: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song.**

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường này đến đường kia.

$d(a, b) = d(M, b) = MH \quad (M \in a)$

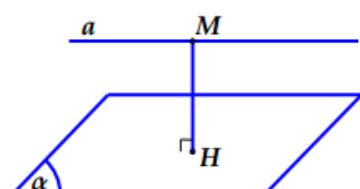
(Quy về bài toán dạng 1)



- Dạng 4: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.**

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đường a đến mặt phẳng (α) : $d(a, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = MH \quad (M \in a)$

(Quy về bài toán dạng 2)

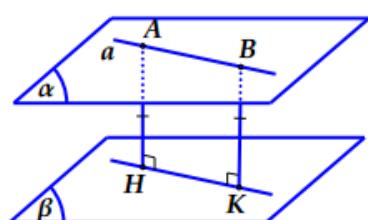


- Dạng 5: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.**

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

$d((\alpha), (\beta)) = d(a, (\beta)) = d(A, (\beta)) = AH \quad (a \subset (\alpha), A \in a)$

(Quy về bài toán dạng 2)

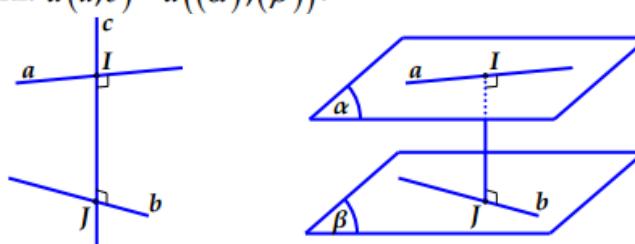


- Dạng 6: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.**

o Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy gọi là **đường vuông góc chung** của a, b . IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a, b .

o Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó: $d(a, b) = IJ$

o Nếu ta dựng 2 mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ lần lượt chứa 2 đường thẳng chéo nhau a, b và song song với nhau thì: $d(a, b) = d((\alpha), (\beta))$.



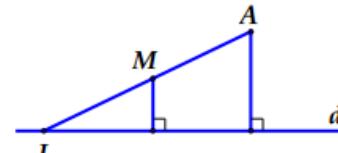
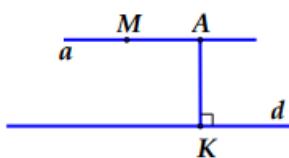
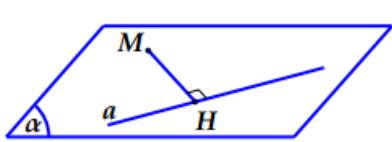
Nhận xét: Tất cả các dạng toán tìm khoảng cách ở trên đều đưa về về hai bài toán tìm khoảng cách cốt lõi nhất đó là: tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

DẠNG 1 : TÌM KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cách 1:

Bước 1. Trong mặt phẳng (M, d) hạ $MH \perp d$ với $H \in d$. Khi đó: $d(M, d) = MH$.

Bước 2. Tính toán tìm độ dài MH



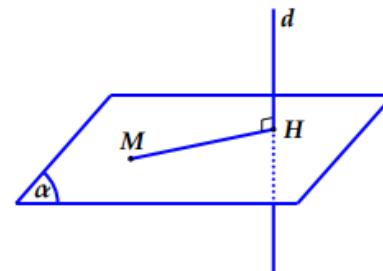
- Nếu tồn tại đường thẳng a qua A và song song với d thì: $d(M, d) = d(A, d) = AK$ ($A \in d$).
- Nếu $MA \parallel d$ hay $d(M, d) = d(A, d)$, ta có thể thay vì tìm $d(M, d)$ ta sẽ tìm $d(A, d)$ với $d(A, d)$ dễ tính toán hơn, từ đó suy ra $d(M, d)$.
- Nếu $MA \cap d = I$, thì: $\frac{d(M, d)}{d(A, d)} = \frac{MI}{AI}$ (áp dụng định lý Ta-lết)

Cách 2:

Bước 1. Dựng (tìm) mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với đường thẳng d .

Bước 2. Tìm giao điểm $H = (\alpha) \cap d$. Lúc này H chính là hình chiếu của M trên đường thẳng d . Suy ra: $d(M, d) = MH$.

Bước 3. Tính toán tìm độ dài MH .



DẠNG 2 : TÌM KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (α) là MH , với H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) . Ký hiệu $d(M, (\alpha)) = MH$.

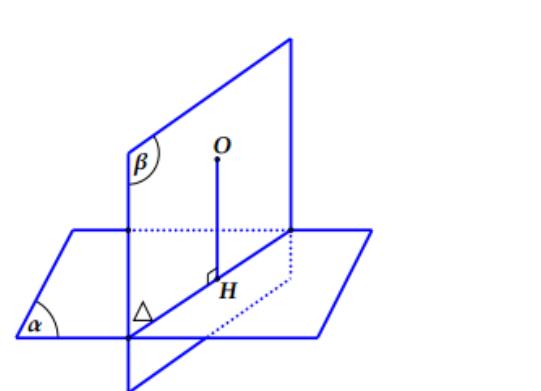
Do đó, muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng.

Ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1:

Bước 1. - Tìm hình chiếu H của O lên (α) .

- Tim mặt phẳng (β) qua O và vuông góc với (α) .
- Tim $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Trong mặt phẳng (β) , kẻ $OH \perp \Delta$ tại H .
- $\Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của O lên (α) .

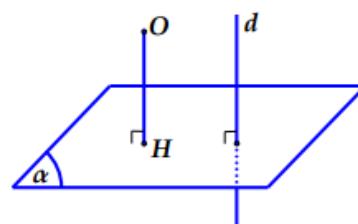


Bước 2. Khi đó OH là khoảng cách từ O đến (α) .

Lưu ý: Chọn mặt phẳng (β) sao cho dễ tìm giao tuyến với (α) .

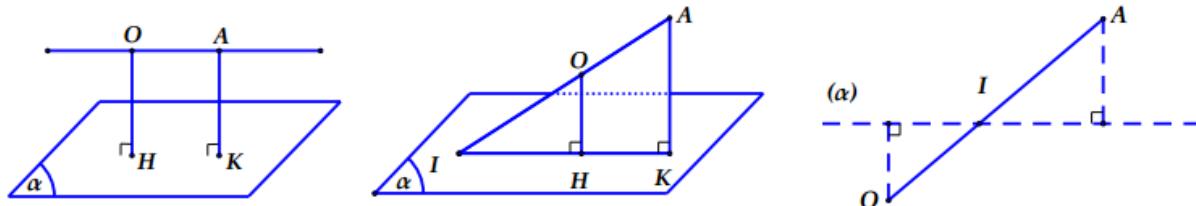
Cách 2:

Nếu đã có trước đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì kẻ $Ox \parallel d$ cắt (α) tại H . Lúc đó, H là hình chiếu vuông góc của O lên (α) $\Rightarrow d(O, (\alpha)) = OH$.



Một số chú ý quan trọng khi giải toán

- Nếu $OA \parallel (\alpha)$ thì: $d(O,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$.
- Nếu OA cắt (α) tại I thì: $\frac{d(O,(\alpha))}{d(A,(\alpha))} = \frac{OI}{AI}$ (định lý Ta-lết)



- Chú ý đến việc đưa bài toán tìm khoảng cách từ một điểm (đề bài cho) bất kỳ đến một mặt phẳng về bài toán tìm khoảng cách từ chân đường cao đến mặt phẳng đó và tìm mối liên hệ giữa hai khoảng cách này. Từ đó suy ra được khoảng cách theo yêu cầu của đề bài.
- Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau:** Cho hình chóp có đỉnh S có các cạnh bên có độ dài bằng nhau: $SA = SB = SC = SD = \dots$. Khi đó hình chiếu O của S lên mặt phẳng đáy trùng với tâm đường tròn nội tiếp đi qua các đỉnh (A, B, C, D, \dots) nằm trên mặt đáy.

Nếu đáy là:

- + Tam giác đều, O là trọng tâm
- + Tam giác vuông, O là trung điểm cạnh huyền.
- + Hình vuông, hình chữ nhật, O là giao điểm của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.

- Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách:** Đưa bài toán khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của khối đa diện mà khối đa diện đó có thể xác định được dễ dàng thể tích và diện tích đáy. Phương pháp này được sử dụng trong trường hợp không thể tính được khoảng cách bằng cách công cụ tính toán như: định lý Pytago, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, định lý cô-sin,...

$$+ V = \frac{1}{3} S.h \Rightarrow h = \frac{3V}{S} : V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình chóp.$$

$$+ V = S.h \Rightarrow h = \frac{V}{S} : V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ.$$

- Nếu tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc thì:

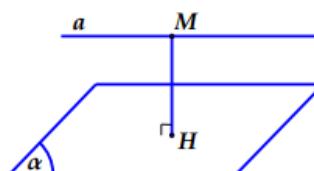
$$d(O, (ABC)) = \sqrt{\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}}$$

DẠNG 3 : TÌM KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG.

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đường a đến mặt phẳng (α) .

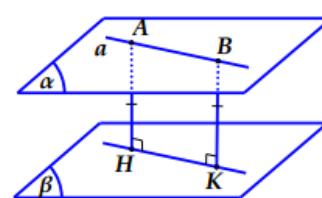
$$d(a, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = MH \quad (M \in a)$$



Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

$$d((\alpha), (\beta)) = d(a, (\beta)) = d(A, (\beta)) = AH \quad (a \subset (\alpha), A \in a)$$



■ DẠNG 4 : KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU TRONG KHÔNG GIAN

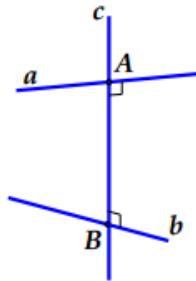
Có 3 cách để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong không gian:

- **Cách 1 :** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng đường vuông góc chung.

Định nghĩa đường vuông góc chung

Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy gọi là “đường vuông góc chung” của a và b . Đoạn thẳng AB gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .

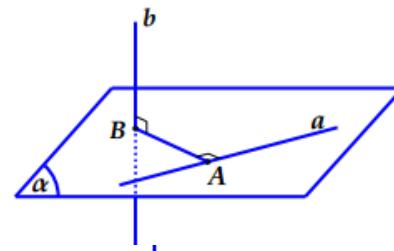
Khi đó, độ dài đoạn vuông góc chung AB là khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau a, b . Kí hiệu: $d(a, b) = AB$



Các cách xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b :

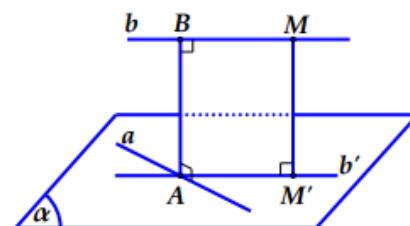
• Trường hợp $a \perp b$:

- Dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
 - Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A .
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.



• Trường hợp a và b không vuông góc với nhau.

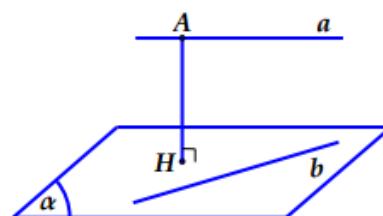
- Dựng mp (α) chứa a và song song với b .
 - Lấy điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'
 - Từ M' dựng $b' \parallel b$ cắt a tại A .
 - Từ A dựng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B .
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.



- **Cách 2 :** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng cách quy về tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Cách làm:

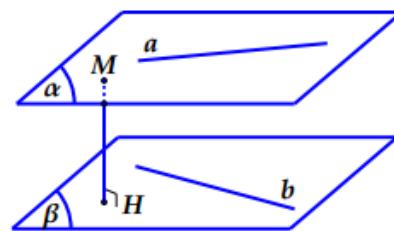
- Dựng (tìm) mặt phẳng (α) chứa b và song song với a .
- Khi đó: $d(a, b) = d(a, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) = AH$ với $A \in a$



- **Cách 3 :** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng cách quy về tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

Cách làm:

- Dựng hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ sao cho $a \subset (\alpha) \parallel (\beta) \ni b$.
- Khi đó: $d(a, b) = d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = MH$



-----❖❖-----

MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ TRONG QUAN HỆ VUÔNG GÓC

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA CỦA KHÁI NIÊM VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1) Góc giữa hai đường thẳng bất kì a và b trong không gian là góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với a và b. Góc đó nhỏ nhất là 0° và lớn nhất là 90° . Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° . **Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc không cắt nhau.**

2) Nếu đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng.

- Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) chỉ cần chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (P).

3) Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

- *Chú ý :*

1) Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P).

2) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
(Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°)

3) **Nhi diện** : là hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng có bờ chung, bờ chung này gọi là *canh của nhi diện*.

4) **Diện tích hình chiếu** : nếu S là diện tích của một đa giác phẳng, S' là diện tích hình chiếu của đa giác đó trên mặt phẳng (P), và φ là góc giữa mặt phẳng chứa đa giác và $mp(P)$ thì ta có công thức : $S' = S \cos \varphi$.

II. CÁC TÍNH CHẤT

1) Qua một điểm đã cho có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng đã cho.

2) Qua một điểm đã cho có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng đã cho.

3) Qua một đường thẳng a đã cho có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) đã cho nếu a không vuông góc với (P) . Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng qua a đều vuông góc với mặt phẳng (P) .

4) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó (nếu có) cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

5) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

6) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

7) Đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng (hoặc một mặt phẳng) thì a song song mặt phẳng (P) hoặc a nằm trên mặt phẳng (P).

8) Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.

- Trước tiên ta xác định các góc này dựa vào định nghĩa :

a) Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau được xác định bằng góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

b) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn hợp bởi đường thẳng đó và hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng.

c) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Trong trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau thì góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến tại một điểm.

Sau đó dựa vào các hệ thức liên hệ giữa góc với độ dài trong hình học phẳng để xác định góc đó.

III. CÁC KHÁI NIÊM LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH VUÔNG GÓC

1) Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) : là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) : hình chiếu vuông góc của điểm M trong không gian là chân đường vuông góc hạ từ M xuống mặt phẳng (P).

2) **Dinh lí ba đường vuông góc** : cho đường thẳng a' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) và b là một đường thẳng nằm trong (P). Trong trường hợp đó : đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với đường thẳng a' .

3) Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng : là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng đó tại trung điểm của nó. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB chính là quỹ tích những điểm cách đều hai điểm A và B.

IV. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

1) Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau

Để giải các bài tập loại này ta thường dùng các cách sau :

- Chứng minh đường thẳng này vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia.
- Dùng định lí ba đường vuông góc.
- Chứng minh đường thẳng này vuông góc với một đường thẳng (hay một mặt phẳng) song song với đường thẳng kia.
- Đưa về chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong mặt phẳng nếu hai đường thẳng đó nằm trong cùng một mặt phẳng (dùng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đường chéo của hình thoi, hình vuông, góc nội tiếp trong nửa đường tròn, định lí Pitago ...)

2) Chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng (đường thẳng a vuông góc với mp(α))

- Chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α).
- Chứng minh đường thẳng a song song với một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α).
- Chứng minh đường thẳng a \subset mặt phẳng (β), trong đó mặt phẳng (β) \perp mặt phẳng (α) và a vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β).
- Chứng minh đường thẳng a là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng (α).

3) Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau

- Chứng minh một trong hai mặt phẳng có chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng là góc vuông.

4) Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.

▪ Trước tiên ta xác định các góc này dựa vào định nghĩa :

1) Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau được xác định bằng góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

2) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn hợp bởi đường thẳng đó và hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng.

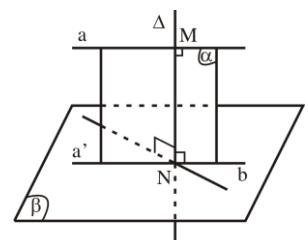
3) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Trong trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau thì góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến tại một điểm.

▪ Sau đó dựa vào các hệ thức liên hệ giữa góc với độ dài trong hình học phẳng để xác định góc đó.

V. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1) Định nghĩa : Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Nếu đường thẳng Δ cắt cả a và b lần lượt tại M và N, đồng thời vuông góc với cả a và b, thì đường thẳng Δ được gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b. Độ dài đoạn MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



2) Cách tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b :

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khi đó có duy nhất một mặt phẳng (β) chứa b và song song với a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua a và vuông góc với (β). Mặt phẳng (α) cắt b tại N và cắt (β) theo giao tuyến a'. Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và vuông góc với (β) thì Δ nằm trong (α) và cắt a tại M. Như vậy Δ cùng vuông góc với cả a và b nên Δ chính là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b, còn độ dài đoạn MN là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau đó.

▪ Nhận xét:

1) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d là độ dài đoạn thẳng AH \perp d với H \in d.

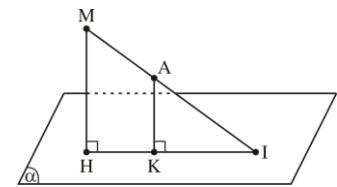
2) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là độ dài đoạn thẳng AH \perp mp(P) với H \in d.

3) Khoảng cách giữa một đường thẳng là một mặt phẳng song song với nó là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của đường thẳng đến mặt phẳng đó.

4) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

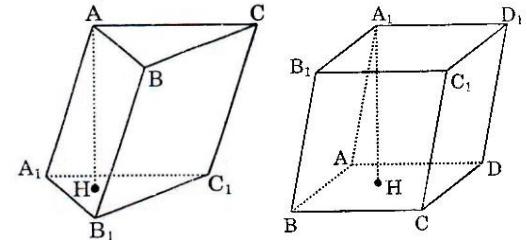
5) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài đoạn vuông góc chung của chúng.
Khoảng cách đó cũng bằng:

- Khoảng cách giữa một trong 2 đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.
- **Chú ý :** Khi biết $d(A, (\alpha)) = x$
- Nếu $MA \parallel (\alpha) \Rightarrow d(M, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$
- Nếu $MA \cap (\alpha) = I \Rightarrow \frac{d(M, (\alpha))}{d(A, (\alpha))} = \frac{IM}{IA}$



VI. HÌNH LĂNG TRÙ

- Khối lăng trụ có mặt bên là hình bình hành, các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Khối lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy. Do đó, trong lăng trụ đứng thì cạnh bên cũng là chiều cao và các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
- Khối lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Trong lăng trụ đều thì các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.



VII. HÌNH HỘP

1) Hình hộp là hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành.

2) Các yếu tố của hình hộp:

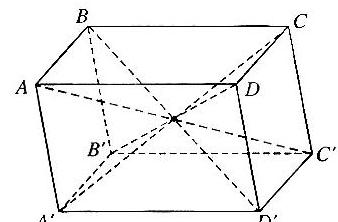
- Có 6 mặt đều là hình bình hành trong đó có 3 cặp mặt đối diện bằng nhau có thể chọn làm đáy.
- Có 8 đỉnh và 12 cạnh chia làm 3 nhóm, mỗi nhóm 4 cạnh song song và bằng nhau.
- Có 4 đường chéo: AC' , $A'C$, BD' , $B'D$ đồng quy tại O là trung điểm của mỗi đoạn. Điểm O gọi là tâm hình hộp.

• **Chú ý :**

_ Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với đáy.

_ Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

_ Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau.



VIII. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1) **Định lý hàm cosin :**

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

2) **Định lý hàm sin :**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3) **Công thức tính diện tích tam giác :**

Gọi $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác ABC, ta có:

$$1) S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$$

$$2) S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

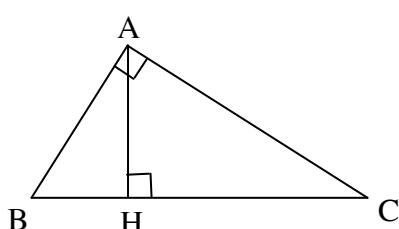
$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hérông})$$

$$4) S = \frac{abc}{4R}$$

4) **Định lý về trung tuyến :**

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 &= \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{aligned}$$

IX. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG



Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$$1) BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$2) AB^2 = BC \cdot BH$$

$$3) AC^2 = BC \cdot CH$$

$$4) AH^2 = HB \cdot HC$$

$$5) AB \cdot AC = AH \cdot BC$$

$$6) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$