

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

A. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

BÀI 1 : Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0 :

$$\begin{array}{ll} 1) u_n = \frac{(-1)^n}{n+5} & 2) u_n = \frac{\sin n}{n+5} \\ 3) u_n = \frac{\cos 2n}{\sqrt{n+1}} & 4) u_n = \frac{1}{n(n+1)} \\ 5) u_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1} & \\ \\ 6) u_n = (0,99)^n & 7) u_n = -\frac{\sin \frac{n\pi}{5}}{(1,01)^n} \\ 8) u_n = \frac{(-1)^n}{2^n+1} & 9) u_n = \frac{6^n \cdot \cos 3n + 5^n}{2^n + 2 \cdot 7^n} \\ 10) u_n = \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+2} & \end{array}$$

BÀI 2 : Tìm các giới hạn sau :

$$\begin{array}{llll} 1) \lim \frac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7} & 2) u_n = \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5} & 3) \lim \frac{3n\sqrt{n+1}}{n^2 + 3n + 1} & 4) \lim \frac{(-1)^n + 2}{n} \\ 5) \lim \frac{2n^4 + (-1)^n \cos^n n}{n^5 + 1} & 6) \lim \frac{\sqrt{4n^2 + n} - 2n}{n+3} & 7) \lim \left(\frac{2}{n^2 + 3n} - \frac{1}{n^2 + 2} \right) & 8) \lim \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2} \\ 9) \lim \frac{1}{2n^2 + 4n + 1} & 10) \lim \frac{-3}{-n^3 + 6n - 3} & 11) \lim (2n-1) \sqrt{\frac{2n+3}{n^4 - n^2 + 2}} & 12) \lim \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}} \\ 13) \lim \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3+n^2}} & 14) \lim \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \right) & 15) \lim \frac{n + \sqrt[5]{n^5+1}}{n \cdot 4^n} & 16) \lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1} - n^2} \end{array}$$

B. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

BÀI 3 : Tìm các giới hạn sau :

$$\begin{array}{llll} 1) \lim \frac{3n^2 + 5n + 4}{2 - n^2} & 2) \lim \frac{-3n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - n} & 3) \lim \frac{2n + 3}{\sqrt{9n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + 1}} & 4) \lim \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n} \\ 5) \lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n} & 6) \lim \frac{(3n+1)(n+2)(n-1)}{n(2n^2 + n + 1)} & 7) \lim \frac{(2n\sqrt{n} + 1)(3 + \sqrt{n})}{(n+1)(n+2)} & 8) \lim \frac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n} \\ 9) \lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} & 10) \lim \frac{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}{2n^2 + n - \sqrt{n}} & 11) \lim \frac{(n^2 + 2)(n-1)^2}{(n^2 + 1)(2n + 3)^2} & 12) \lim \frac{(2n+1)^2(4-n)}{(3n+5)^3} \\ 13) \lim \frac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3} & 14) \lim \sqrt{\frac{n^6 + 3n^3 - 3}{2n^6 + n^5 + 2}} & 15) \lim \frac{2.7^{n+2} - 4^{n+3} + 1}{7^n + 3.5^{n+2}} & 16) \lim \frac{n! + (n+1)!}{2(n+1)! + 7n!} \end{array}$$

ĐS : 1) -3 ; 2) $-3/2$; 3) 2 ; 4) $-\sqrt{2}/3$; 5) $2/3$; 6) $3/2$; 7) 2 ; 8) $-2/3$; 9) $4/3$; 10) $1/2$; 11) $1/4$; 12) $-4/27$; 13) $\sqrt{2}/2$; 14) $\sqrt{2}/2$; 15) 98 ; 16) $1/2$.

C. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

BÀI 4 : Tính giới hạn của dãy số :

$$\begin{array}{llll} 1) \lim \frac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2} & 2) \lim (2^n - 3^n) & 3) \lim \frac{3^n + 1}{2^n - 1} & 4) \lim \frac{-2n^4 - 3n + 4}{n^2 - 2n} \\ 5) \lim \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - 5(n+3)!} & 6) \lim \frac{(n-2)^3 (2n+1)^6}{(1+2n)^2 (3+n^2)^3} & 7) \lim \frac{n(n-1)^5}{(n+1)^2 (n+2)^3} & 8) \lim \frac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1} \\ 9) \lim \frac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}} & 10) \lim \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12} & 11) \lim \frac{(2n+1)(1-3n)}{\sqrt[3]{n^3 + 7n^2 - 5}} & 12) \lim \frac{5^n + 2^n - 7}{3^n + 2} \end{array}$$

ĐS : 1) $-\infty$; 2) $-\infty$; 3) $+\infty$; 4) $-\infty$; 5) $-\infty$; 6) $+\infty$; 7) $+\infty$; 8) $+\infty$; 9) $+\infty$; 10) $+\infty$; 11) $-\infty$; 12) $+\infty$

BÀI 5 : Tìm các giới hạn sau :

$$\begin{array}{lll} 1) \lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) & 2) \lim \left(\sqrt{n^2 - 3n} - n - 2 \right) & 3) \lim \left(\sqrt{4n^2 + 4n + 3} - \sqrt{4n^2 + 1} \right) \\ 4) \lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n + 2 \right) & 5) \lim \sqrt{4n^2 + n} + \sqrt[3]{2n^2 - 8n^3} & 6) \lim \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \end{array}$$

7) $\lim n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2} \right)$

8) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right)$

9) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n \right)$

10) $\lim \left(1 + n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1} \right)$

11) $\lim \left(n - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right)$

12) $\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{n}$

13) $\lim \frac{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{3n^2 + 1}}{n + 3}$

14) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2}$

15) $\lim \frac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}$

ĐS: 1) $1/2$; 2) $-7/2$; 3) 1 ; 4) $8/3$; 5) $5/12$; 6) $1/2$; 7) $1/3$; 8) $3/2$; 9) $-2/3$; 10) $-7/2$; 11) 1 ; 12) $-2/3$; 13) $\sqrt{3} - 1$; 14) $1 + \sqrt{3}$; 15) $1/3$; 16) $\sqrt{2}/2$.

BÀI 6: Tính giới hạn của dãy số :

1) $\lim \left(\sqrt[3]{n^2 + 7} - 2n \right)$

2) $\lim \left(n\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} \right)$

3) $\lim \left(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1} \right)$

5) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$

6) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$

7) $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)n$

D. MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC

BÀI 7: Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với :

1) $\lim \left(n^3 - 2n^2 + n + 4 \right)$

2) $\lim \sqrt{3n^4 + 5n^2 + n - 1}$

3) $\lim \left(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \right)$

5) $\lim \sqrt{2n^4 - n^2 + n + 2}$

6) $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$

7) $\lim \frac{\sqrt{4n^4 + 2n} - 3n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} - 2n}$

8) $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$

ĐS: 1) $+\infty$; 2) $+\infty$; 3) $+\infty$; 4) $+\infty$; 5) $+\infty$; 6) $-\infty$; 7) $+\infty$; 8) $+\infty$

BÀI 8: Tính giới hạn của dãy số :

1) $\lim \frac{4^n - 5^n}{2^n + 3.5^n}$

2) $\lim \frac{2^n - 3^n + 4.5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n-2} + 5^{n+1}}$

3) $\lim \frac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n}$

4) $\lim \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{4^n + 3.2^n}$

5) $\lim \frac{10.5^n - 3 + 2.(3)^{n+1}}{(5)^{n+1} - (3)^{n+2}}$

6) $\lim \frac{3.2^{n+1} - 2.3^{n+1}}{4 + 3^n}$

7) $\lim \frac{2^{2n} + 5^{n+2}}{3^n + 5.4^n}$

8) $\lim \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + (-1)^{n+1}}$

9) $\lim \frac{(n^2 + 2n)(3^n + 1)}{(n+3)(n+2)3^{n+1}}$

10) $\lim \frac{2^n + 3^{n-1} + 5^{n-3}}{2^{n-2} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$

11) $\lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

12) $\lim \sqrt{\frac{3^n + 2^{n+1}}{5n + 3^{n+1}}}$

ĐS: 1) $-1/3$; 2) 20 ; 3) 7 ; 4) -1 ; 5) $41/2$; 6) -6 ; 7) $+\infty$; 8) $1/2$; 9) $1/3$; 10) $1/625$; 11) $1/3$; 12) $\sqrt{3}/3$.

BÀI 9: Tính :

1) $\lim \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}{1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n}$

2) $\lim \frac{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}$

3) $\lim \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

4) $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n}$

5) $\lim \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n+1)}{n^2 + 2n + 1}$

6) $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right]$

7) $\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}$

8) $\lim \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

9) $\lim \left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right)$

ĐS: 1) 0 ; 2) 1 ; 3) 0 ; 4) 0 ; 5) $3/2$; 6) 1 ; 7) $8/5$; 8) $1/2$; 9) $2/3$.

BÀI 10: Tìm tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn

1) $S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ĐS: $S = 4$

2) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ ĐS: $S = 1$.

BÀI 11: Đổi mỗi số thập phân vô hạn tuần hoàn sau thành phân số :

1) $0,4444\dots$ ĐS: $4/9$

2) $0,121212\dots$ ĐS: $12/99$

3) $0,32111\dots$ ĐS: $289/900$

4) $5,616161\dots$ ĐS: $556/99$

BÀI 12: (SGK) Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $5/3$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $39/25$. Tìm số hạng đầu và công bội. ĐS: $q = 2/5$; $u_1 = 1$.

LÝ THUYẾT GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

A. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

1) Định nghĩa : Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết: $\lim (u_n) = 0$ hoặc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hoặc $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$

2) Một số định lý :

a) **Định lý 1 :** Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

b) **Hệ quả :** $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 0$)

Một số dãy số có giới hạn 0 : $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

c) **Định lý 2 :** Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

▪ **Thí dụ :** Chứng minh rằng các dãy với số hạng tổng quát sau có giới hạn 0 : a) $\frac{(-1)^n}{n+5}$ b) $\frac{\sin n}{n+5}$

Ta có: $\left| \frac{(-1)^n}{n+5} \right| \leq \frac{1}{n+5} \leq \frac{1}{n}$ và $\lim \frac{1}{n} = 0$ nên $\lim \frac{(-1)^n}{n+5} = 0$

B. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

1) Định nghĩa : Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$.

Khi đó ta viết: $\lim (u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \rightarrow L$

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

▪ **Thí dụ :** Chứng minh rằng $\lim \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + 5 \right) = 5$

Ta có: $\lim \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + 5 - 5 \right) = \lim \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0$. Vậy theo định nghĩa ta có: $\lim \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + 5 \right) = 5$

2) Một số định lý :

Định lý 1 : Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó :

a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$

Định lý 2 : Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là hằng số. Khi đó :

a) $\lim(u_n + v_n) = L + M$ b) $\lim(u_n - v_n) = L - M$ c) $\lim(u_n \cdot v_n) = L \cdot M$

d) $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot L$

e) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)

3) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn :

Xét cấp số nhân: $u_1, u_1q, u_1q^2, \dots, u_1q^n, \dots$ có công bội là q với $|q| < 1$ (gọi là một cấp số nhân lùi vô hạn).

Khi đó:
$$S = u_1 \cdot q + u_2 \cdot q^2 + \dots + u_n \cdot q^n = \frac{u_1}{1-q}$$

▪ **Thí dụ 2 :** Tính: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ Cấp số nhân đã cho lùi vô hạn với số hạng đầu:

$$u_1 = \frac{1}{2} \text{ và công bội } q = \frac{1}{2} \text{ nên: } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

C. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

1) **Dinh nghĩa 1** : (Dãy số có giới hạn $+\infty$) Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Khi đó ta viết : $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \rightarrow +\infty$.

Áp dụng định nghĩa trên ta có thể chứng minh được :

$$a) \lim n = +\infty \quad b) \lim \sqrt{n} = +\infty \quad c) \lim \sqrt[3]{n} = +\infty$$

2) **Dinh nghĩa 2** : (Dãy số có giới hạn $-\infty$) Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số âm đó.

Khi đó ta viết : $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$

3) **Dinh lý 1** : Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$

4) **Dinh lý 2** : (Định lý kẹp về giới hạn dãy số)

Cho ba dãy số (u_n) , (v_n) , và (w_n) . Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) thì $\lim v_n = L$.

▪ **Thí dụ 3** : Tìm giới hạn của dãy số : $\lim \frac{(-1)^n + \sin(n+10)}{n}$

▪ **Giải** :

Ta có : $|(-1)^n| \leq 1$ và $|\sin(n+10)| \leq 1$

$$\Rightarrow |(-1)^n + \sin(n+10)| \leq |(-1)^n| + |\sin(n+10)| \leq 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq (-1)^n + \sin(n+10) \leq 2$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{n} \leq \frac{(-1)^n + \sin(n+10)}{n} \leq \frac{2}{n}$$

Vì $\lim \left(-\frac{2}{n} \right) = \lim \left(\frac{2}{n} \right) = 0$ nên theo định lý kẹp ta có $\lim \frac{(-1)^n + \sin(n+10)}{n} = 0$

<i>Qui tắc 1</i>			<i>Qui tắc 2</i>			<i>Qui tắc 3</i>		
Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ được cho như sau :			Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n \cdot v_n)$ được cho như sau :			Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho như sau :		
$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \cdot v_n)$	$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n \cdot v_n)$	Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	+	$+\infty$	+	+	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	-	$-\infty$	+	-	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	+	$-\infty$	-	+	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-	$+\infty$	-	-	$+\infty$

D. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN GIỚI HẠN DÃY SỐ

a) Để giải các bài toán tìm giới hạn của biểu thức có dạng $\frac{u_n}{v_n}$, ta lấy số có số mũ lớn nhất đặt thừa số chung ở tử số và mẫu số, rồi đơn giản trước khi lấy lim.

Ta có : $\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} C \neq 0 & (C \text{ là hằng số}) \text{ nếu bậc tử bằng bậc mẫu.} \\ 0 & \text{nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu.} \\ \pm\infty & \text{nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu.} \end{cases}$

b) Để giải các bài toán tìm giới hạn của biểu thức trong đó có hiệu $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$ hoặc $(\sqrt[3]{u_n} - \sqrt[3]{v_n})$ (u_n và v_n là đa thức biến số n), ta thường sử dụng phương pháp nhân và chia với biểu thức liên hợp tương ứng với mục đích là mất các dấu căn trong hiệu của 2 biểu thức có chứa dấu căn.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

BÀI 1 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng xác định)

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 5x^2 + 10x) & \underline{\text{ĐS}} : 48 & 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1}{2x^5 + 3} \quad \underline{\text{ĐS}} : 1 \\ 4) \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 5}{x^2 + 2x} \right| & \underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{3} & 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \cos x}{2 - \tan x} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}} & & 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2|x+1|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3} \quad \underline{\text{ĐS}} : 3 \end{array}$$

BÀI 2 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$)

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} & \underline{\text{ĐS}} : 48 & 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \quad \underline{\text{ĐS}} : -\frac{1}{2} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & \underline{\text{ĐS}} : -1 & 5) \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} \quad \underline{\text{ĐS}} : -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right) \underline{\text{ĐS}} : -2 & & 8) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \quad \underline{\text{ĐS}} : -\frac{1}{2} \\ 10) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} & \underline{\text{ĐS}} : -\frac{1}{54} & 11) \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^3 + 3\sqrt{3}}{3 - x^2} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 - 2x^2 + 4x + 8} \underline{\text{ĐS}} : -\frac{1}{4} & & 14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4 + 3x^2 - x^3}{-2 + 3x - x^2} \quad \underline{\text{ĐS}} : 0 \\ 16) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8} & \underline{\text{ĐS}} : -16 & 17) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - x - 6)^2}{x^3 + 2x^2} \quad \underline{\text{ĐS}} : 0 \\ 19) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 - x + \sqrt{2} - 2} \underline{\text{ĐS}} : \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} & & 20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{3}{4} \\ 22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^2 + x - 2} & \underline{\text{ĐS}} : \frac{n}{3} & 23) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + x - 2}{x^5 + x - 2} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{11}{6} \\ 21) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) \underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{2} & & 24) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^8 + x - 258}{x^4 + x - 18} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{1025}{33} \end{array}$$

BÀI 3 : Tìm các giới hạn sau :

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} & \underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{4} & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{9} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+4} - 2} & \underline{\text{ĐS}} : \frac{4}{3} & 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-x^2} - 1}{x^2 - x} \quad \underline{\text{ĐS}} : 0 \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+1} - 1}{x^2 + x} & \underline{\text{ĐS}} : 0 & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{3x} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{6} \\ 10) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x^2+x-4}}{9-x^2} \underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{2\sqrt{2}} & & 9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3+3x} - 2}{\sqrt{x^2+x+7} - 3} \quad \underline{\text{ĐS}} : 3 \\ 11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{10+2x^3} + x - 1}{x^2 + 3x + 2} \underline{\text{ĐS}} : \frac{3}{2} & & 12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x + 1 - \sqrt[3]{4x^2 + 28}} \quad \underline{\text{ĐS}} : 54 \end{array}$$

BÀI 4 : Tìm các giới hạn sau :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 3} \quad \underline{\text{ĐS}} : -\frac{2}{3} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{7}{3}$$

BÀI 5 : Tìm các giới hạn sau :

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x+10} - \sqrt[3]{x+11}}{x^3 + 27} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{5}{324} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2 - 1} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{11}{24} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x} \quad \underline{\text{ĐS}} : \frac{5}{6}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 12}}{\left(\sqrt{x^2 + x - 19} - 1\right)\left(\sqrt{x + 12} - 2\right)}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\frac{2}{9}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt[3]{2x^3 + 8}}{x^2 + 3x}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{12}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt[3]{4x^3 - 24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \frac{19}{16}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} + 3\sqrt{x^2+x-1} - 5\sqrt{2x^2-1}}{1-x}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \frac{11}{4}$$

BÀI 6 : Tìm các giới hạn sau :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \frac{3}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{x-1}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\frac{1}{3}$$

BÀI 7 : Tìm các giới hạn sau :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} \sqrt{\frac{x+4}{4-x}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right]$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(x-3)^3}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{(x^2 + 3x + 2)^2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{(x+2)^2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

BÀI 8 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn một bên)

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \text{không tồn tại}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -2$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 0$$

$$9) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{8+2x} - 2}{\sqrt{x+2}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 0$$

$$10) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x+1|}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -1$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 0$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1^-} x \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x+1-x}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : 1$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^3} \right)$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

$$17) \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : -\infty$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 - 2x}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - x}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$21) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 4}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : +\infty$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\underline{\text{ĐS}} : \frac{1}{\sqrt{2}}$$

BÀI 9 : Tìm giới hạn bên trái, bên phải và giới hạn (nếu có) của hàm số $f(x)$:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2|x|-1 & \text{khi } x \leq -2 \\ \sqrt{2x^2+1} & \text{khi } x > -2 \end{cases} . \text{Tìm } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x); \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \text{ và } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \underline{\text{ĐS}} : 3$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases} . \text{Tìm } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \underline{\text{ĐS}} : 3; 5; \text{không tồn tại.}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3 \leq x < 3 \\ 1 & \text{khi } x = 3 \\ \sqrt{x^2-9} & \text{khi } x > 3 \end{cases} . \text{Tìm } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ (nếu có)}$$

BÀI 10 :

1) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$. ĐS: $m = 1 \vee m = -2$

2) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{khi } x > 1 \\ mx+2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$. ĐS: $m = -1$

BÀI 11 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng hàm số lượng giác)

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ ĐS: -1 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$ ĐS: -3 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 - \tan x}$ ĐS: 1

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1 - 1 + \sin 3x}{\sqrt{1 - \cos x}} \right|$ ĐS: $3\sqrt{2}$ 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + \sin 2x + 1}{\cos x}$ ĐS: 2 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right)$ ĐS: 0

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \cos x}$ ĐS: 8 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin 4x}$ ĐS: 0 9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \sin 2x}{\tan x - 1}$ ĐS: 1

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x}$ ĐS: -1 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x}$ ĐS: $\frac{1}{2}$ 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$ ĐS: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{1 - \cos 2x + \sin^2 x}$ ĐS: 0 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin 2x + \cos 2x - 1}$ ĐS: 0 15) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x - 1}$ ĐS: 3

BÀI 12 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn vô cực)

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7)$ ĐS: $-\infty$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$ ĐS: $+\infty$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 5x + 1)$ ĐS: $+\infty$

BÀI 13 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$)

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1}$ ĐS: -2 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{x^4 - 6x + 1}$ ĐS: 0 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 3}$ ĐS: $+\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 2x - 7}{x^2 - 3x - 2}$ ĐS: $-\infty$ 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4}$ ĐS: 2 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - x + 2}$ ĐS: 0

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2}$ ĐS: 1 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 + x + 2}{3x - 2}$ ĐS: $-\infty$ 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x + 1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ĐS: 1

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 3}}$ ĐS: $\frac{1}{2}$ 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2x^5 + x^3 - 1}{(2x^2 - 1)(x^3 + x)}}$ ĐS: 1 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1}$ ĐS: $+\infty$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3}$ ĐS: 0 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 11}{2x - 7}$ ĐS: $+\infty$ 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{2|x| + 1}$ ĐS: $+\infty$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1}$ ĐS: -2 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 + 1)(5x + 3)}{(2x^3 - 1)(x + 1)}$ ĐS: 0 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 3)^2 (4x + 7)^3}{(3x - 4)^2 (5x^2 + 1)}$ ĐS: $+\infty$

BÀI 14 : Tìm các giới hạn sau :

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$ ĐS: $\frac{1}{2}$ 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{\sqrt[3]{x^3 - x + 1}}$ ĐS: 1 ; -1 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1} - x + 2}{4 - 3x}$ ĐS: $-\frac{1}{3}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 4x^2 + 3}{2x + 3 - \sqrt[3]{3 + 2x - x^3}}$ ĐS: $+\infty$ 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$ ĐS: 2 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x}}{x + 4}$ ĐS: $-\infty$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17}$ ĐS: $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x} - x}{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}$ ĐS: $-\infty$ 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x}$ ĐS: $+\infty$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 10} \quad \underline{DS} : -2$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x} \quad \underline{DS} : -\infty$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{2x - 1} \quad \underline{DS} : -\frac{1}{2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 1}}{x + 1} \quad \underline{DS} : \pm 1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{\sqrt{x^2 + 1} - 3x} \quad \underline{DS} : +\infty$$

BÀI 15 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng vô định $\infty - \infty$)

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x) \quad \underline{DS} : \frac{1}{4}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x + 4} - x + 3) \quad \underline{DS} : \frac{7}{2}; +\infty$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) \quad \underline{DS} : 0$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x+x^2}) \quad \underline{DS} : -\infty$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - 2x + 1) \quad \underline{DS} : 0$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}) \quad \underline{DS} : +\infty$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x - 3 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3}) \quad \underline{DS} : -2; -\infty$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 8x}) \quad \underline{DS} : \pm\infty$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4x + \sqrt[3]{3x^2 - 64x^3}) \quad \underline{DS} : -\frac{1}{2}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}) \quad \underline{DS} : 2$
- 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{4x^2 - 3x} + 3\sqrt[3]{x^3 - x} - 7\sqrt{x^2 + 3}) \quad \underline{DS} : -\frac{3}{2}$

BÀI 16 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng vô định $\infty \cdot 0$)

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+3)(\sqrt{x^2 + 4} - x)] \quad \underline{DS} : 2$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} \quad \underline{DS} : 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + x} \sqrt{\frac{x^5 + x^4 - 2}{2x+1}} \quad \underline{DS} : \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x}{2x^4 + x^2 + 1}} \quad \underline{DS} : 0$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5)\sqrt{\frac{5-x}{4-2x-x^3}} \quad \underline{DS} : 1$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^3 + x}} \quad \underline{DS} : 1$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 3} + x) \quad \underline{DS} : -\frac{3}{2}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - 1 \right) \quad \underline{DS} : -1$
- 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \underline{DS} : -\frac{1}{2}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x-2} \sqrt{\frac{8x^3 + x - 1}{x+4}} \quad \underline{DS} : \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} + x - 2\sqrt{x^2 + x}) \quad \underline{DS} : -\frac{1}{4}$

■ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC ĐỂ TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1) Phương pháp dùng định lý hàm số kép giữa hai hàm số.

BÀI 17 : Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng của hàm số lượng giác)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} \quad \underline{DS} : 0 \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2 \cos x}{x^2 + x + 1} \quad \underline{DS} : 0 \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \underline{DS} : 0$$

$$2) \text{ Phương pháp dùng định lý } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{Hệ quả : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

BÀI 18 : Tìm các giới hạn sau :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad \underline{DS} : 3$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} \quad \underline{DS} : \frac{25}{2}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad \underline{DS} : 4$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} \quad \underline{DS} : -\frac{2}{3}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} \quad \underline{DS} : 1$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x} \quad \underline{DS} : 2$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} \quad \underline{DS} : \frac{5}{2}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad \underline{DS} : 2$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad \underline{DS} : \frac{1}{2}$

BÀI 19 : Tìm các giới hạn sau :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x} \quad (\text{DBĐH 2002}) \quad \underline{DS} : \frac{5}{6}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x} \quad (\text{DBĐH 2002}) \quad \underline{DS} : \frac{5}{6}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x-1)^2} \quad (\text{DBĐH 2002}) \quad \underline{DS} : 15$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) \quad \underline{DS} : \frac{3}{2}$

BÀI TẬP NÂNG CAO GIỚI HẠN HÀM SỐ

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

BÀI 1: Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 3x + 4} \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{x^2}$

5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+11} - \sqrt[3]{43+8x}}{2x^2 + 3x - 2}$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5} - 3x}{5 + \sqrt[3]{8x^3 - 1}}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 + 3} + x^3 - 3x}$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 - 200x^2 + 12x + 9} - \sqrt{x^2 - 5x + 2}}{11x - 4}$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+4} + \sqrt{9-6x} - 5}{x^2}$

15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1}$

17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sin 4x + 5\cos 2x}{3x^2 + 2x + 1}$

19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$

21) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+3}{x}} \right)$

23) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018} - 2018}{x-1}$

25) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$

27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{(1+2x)(1+3x)(1+4x)} - 1}{x}$

29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2004)\sqrt[3]{1-2x} - 2004}{x}$

31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$

33) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[2018]{x} - 1}{x^2 - 1}$

35) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + x - 2}{x^5 + x - 2}$

37) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

39) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[3]{x^3 - 8} \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{x+2} - 1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{5x+6} - 5}$

10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + x^4 - 3x^3 + x^2 + 3}{\sqrt{2x-2}}$

12) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{x^2 - \frac{1}{4}}$

14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} - 2018x + 2017}{(x-1)^2}$

16) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^2 + 2x - 3}}$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - 3}{x}$

20) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^3 + x^2 - 6x + |x+3|}{x+3}$

22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{4x^4 + 1}{x+2x^4}} - \frac{\sqrt{2x^2 - 4}}{x} \right)$

24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x-1}$

26) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2}$

28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a}}{x}$

30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2015)\sqrt[3]{1-4x^2} - 2015}{x^2}$

32) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[7]{2-x} - 1}{x-1}$

34) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{x-2}}{x-1}$

36) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^8 + x - 258}{x^4 + x - 18}$

38) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x^3 - 24} + \sqrt{x+2} - 8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$

40) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{4x^2 - 3x} + 3\sqrt[3]{x^3 - x} - 7\sqrt{x^2 + 3} \right)$

$$41) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 4x^2 + 3}{2x + 3 - \sqrt[3]{3 + 2x - x^3}}$$

$$42) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x - 1} + 3\sqrt{x^2 + x - 1} - 5\sqrt{2x^2 - 1}}{1 - x}$$

$$43) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 4x^2 + 3}{2x + 3 - \sqrt[3]{3 + 2x - x^3}}$$

BÀI 2: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính tổng $S = a^2 + b^2$. ĐS : $S = 13$

BÀI 3: Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2 + 3} + 2017}{2x + 2018} = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của a . ĐS : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

BÀI 4: Tìm a, b sao cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 4x}{x - 2} - (ax + b) \right] = 1$ ĐS : $a = 1; b = 5$.

BÀI 5: Tính $P = a - 4b$. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right] = 0$ ĐS : $P = 5$.

BÀI 6: Cho các số thực a, b, c thỏa $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = -2$. Tính $P = a + b + 5c$.

ĐS : $P = 12$.

BÀI 7: Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$.

Chứng minh rằng giá trị của a là một nghiệm của phương trình $x^2 + 9x - 10 = 0$. ĐS : $a = -10$.

BÀI 8: Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = \frac{a\sqrt{2}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c$?

ĐS : 13.

BÀI 9: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ mx+1 & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = 2$. ĐS : $m = -\frac{3}{8}$

-----♪ ♪ -----

LÝ THUYẾT GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

A. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1) Giới hạn hữu hạn

Định nghĩa 1 : Giả sử $(a ; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ (tức là $x_n \in (a ; b)$ và $x_n \neq x_0$ với mọi n) mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số)

2) Giới hạn vô cực : Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm được định nghĩa tương tự như giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm. Chẳng hạn, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ có nghĩa là với mọi dãy (x_n) trong tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$.

II. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 2 : Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a ; +\infty)$ (tức là $x_n > a$ với mọi n) mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$. Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý : Với mọi số nguyên dương k bất kỳ cho trước:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases} & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \\ & & d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \end{array}$$

III. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lý 1 : Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M & b) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M \\ c) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M. \text{ Đặc biệt, nếu } c \text{ là hằng số thì } \lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = cL & d) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (với } M \neq 0) \end{array}$$

Định lý 2 : Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, khi đó: a) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$ b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Định lý 3 : (Định lý kẹp về giới hạn của hàm số)

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và ba hàm số $f(x)$, $u(x)$ và $v(x)$. Nếu $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ với mọi $x \in K \setminus \{x_0\}$ và nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

B. GIỚI HẠN MỘT BÊN

1) Giới hạn hữu hạn

Định nghĩa 1 : Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0 ; b)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0 ; b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^+$.

Định nghĩa giới hạn bên trái của hàm số được phát biểu tương tự.

Định nghĩa 2 : Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a ; x_0)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a ; x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^-$.

Định lý 4 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

2) Giới hạn vô cực

Các giới hạn : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

▪ Phương pháp tìm giới hạn một bên của hàm số :

Chú ý rằng : khi $x \rightarrow x_0^+$ nghĩa là $x \rightarrow x_0$ và $x > x_0$. Khi $x \rightarrow x_0^-$ nghĩa là $x \rightarrow x_0$ và $x < x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ tồn tại.} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \end{cases}$$

C. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

Định lý 5 : Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Quy tắc 1 : tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$			Quy tắc 2 : tìm giới hạn của tích $\frac{f(x)}{g(x)}$ (TH $g(x) > 0$ khi $x \rightarrow x_0$)			Quy tắc tìm giới hạn của tích $\frac{f(x)}{g(x)}$ (TH $g(x) < 0$ khi $x \rightarrow x_0$)		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$\pm\infty$	$L > 0$	$\pm\infty$	L	$+\infty$	0	L	$-\infty$	0
$\pm\infty$	$L < 0$	$\mp\infty$	$L > 0$	0	$+\infty$	$L > 0$	0	$-\infty$
			$L < 0$		$-\infty$	$L < 0$		$+\infty$

D. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

Ta có 4 dạng vô định sau :

1) Dạng $\frac{0}{0}$: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

2) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

3) Dạng $0.\infty$: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

4) Dạng $\infty - \infty$: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ hay $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

▪ **Chú ý :** Khi $x \rightarrow x_0^+$; $x \rightarrow x_0^-$; $x \rightarrow +\infty$ hay $x \rightarrow -\infty$ ta cũng thường gặp các dạng toán vô định như trên.

▪ Phương pháp giải các bài toán giới hạn hàm số

a) Để giải các bài toán tìm giới hạn của biểu thức có dạng $\frac{u_n}{v_n}$, ta lấy số có số mũ lớn nhất đặt thừa số chung ở tử số và mẫu số, rồi đơn giản trước khi lấy lim.

Ta có : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} C \neq 0 & (C \text{ là hằng số}) \text{ nếu bậc tử bằng bậc mẫu.} \\ 0 & \text{nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu.} \\ \pm\infty & \text{nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu.} \end{cases}$

b) Để giải các bài toán tìm giới hạn của biểu thức trong đó có hiệu $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$ hoặc $(\sqrt[3]{u_n} - \sqrt[3]{v_n})$ (u_n và v_n là đa thức biến số n), ta thường sử dụng phương pháp nhân và chia với biểu thức liên hợp tương ứng với mục đích là mất các dấu căn trong hiệu của 2 biểu thức có chứa dấu căn.

▪ Giới hạn hàm số lượng giác

a) **Định lý :** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) **Hệ quả :** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.