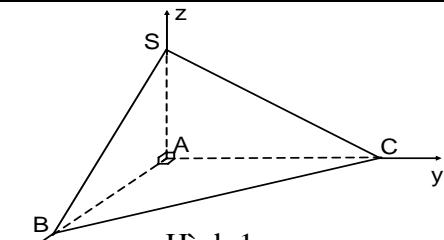
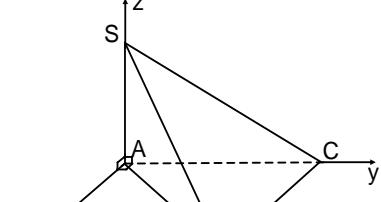
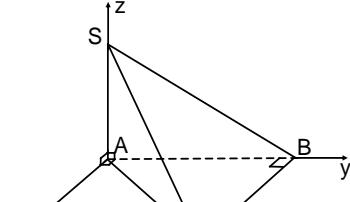
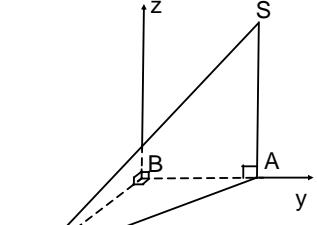
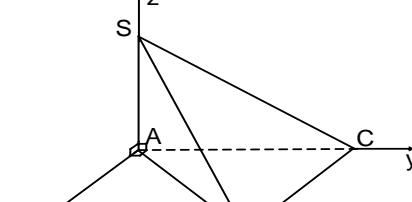
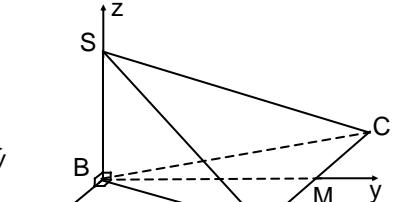
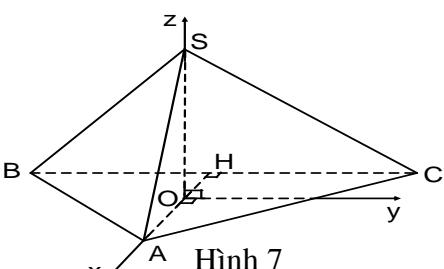
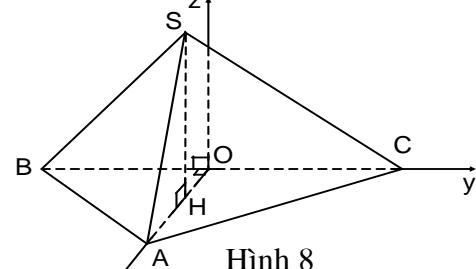
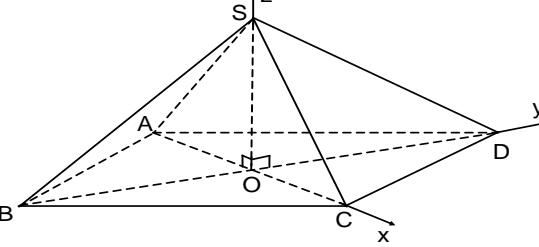
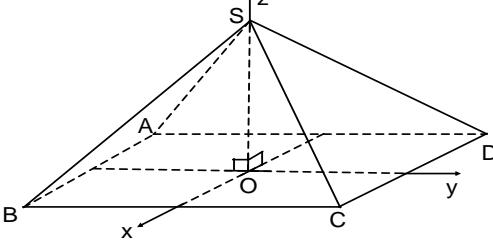
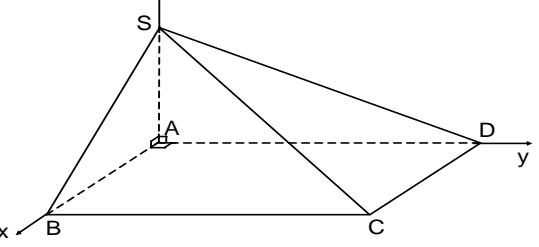
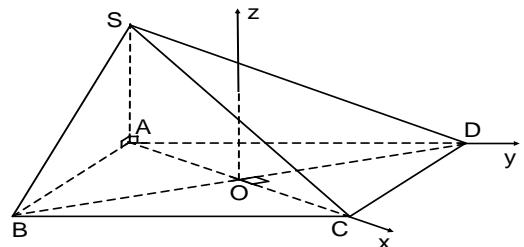


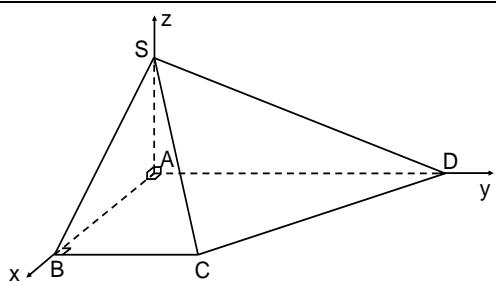
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA HHKG

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

HÌNH	HÌNH MINH HỌA		
1) Hình chóp S.ABC có : $SA \perp (ABC)$; ΔABC vuông tại A.	 Hình 1		
2) Hình chóp S.ABC có : $SA \perp (ABC)$; ΔABC vuông tại B.	 Hình 2	 Hình 3	 Hình 4
3) Hình chóp S.ABC có : $SA \perp (ABC)$; ΔABC cân tại B.	 Hình 5	 Hình 6	
4) Hình chóp S.ABC có : ΔABC đều. ▪ Ngoài cách chọn trong hình 5, hình 6, còn có thể chọn như hình 7, hình 8.	 Hình 7	 Hình 8	
5) Hình chóp đều S.ABC, có thể lựa chọn một trong hai cách sau :	 Hình 9	 Hình 10	
6) Hình chóp S.ABCD có $SA \perp$ $(ABCD)$; có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật thì chọn hình 11. ▪ Nếu đáy là hình thoai thì chọn hình 12	 Hình 11	 Hình 12	

7) Hình chóp

S.ABCD có :
 $SA \perp (ABCD)$; đáy là hình thang vuông.



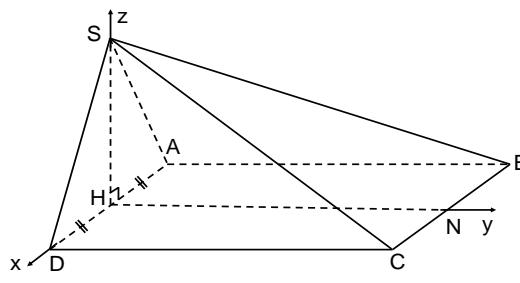
Hình 13

Giả sử có :

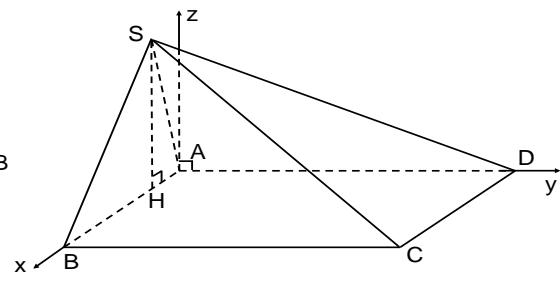
$SA = h$, $AB = BC = a$ và $AD = 2a$
 Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho :
 $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$,
 $D(0; 2a; 0)$, $S(0; 0; h)$.

8) Hình chóp

S.ABCD có mặt bên vuông góc với mặt đáy.



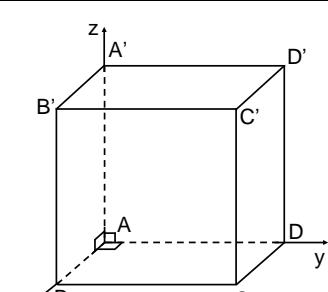
Hình 14



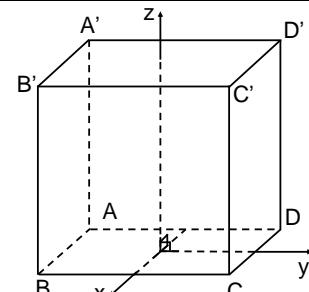
Hình 15

11) Hình lập phương, hình hộp chữ nhật có thể chọn hình 16, hình 17.

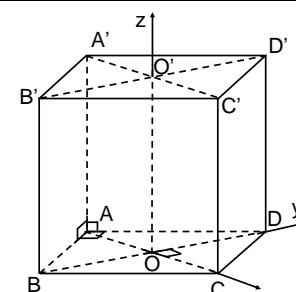
▪ Hình hộp có đáy là hình thoi ABCD thì chọn hình 18.



Hình 16

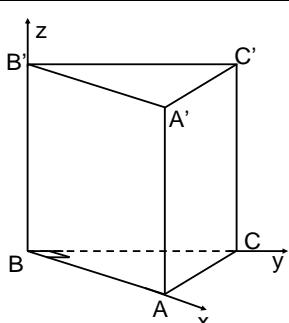


Hình 17



Hình 18

9) Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông tại B.



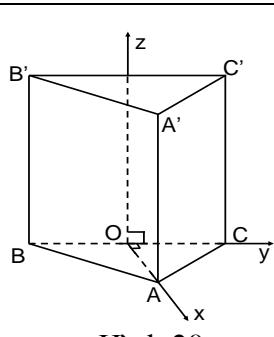
Hình 19

Giả sử có :

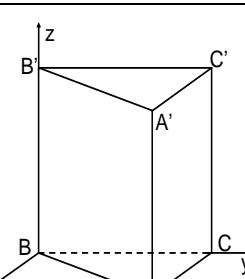
$BB' = h$, $AB = a$, $BC = b$.
 Chọn hệ trục tọa độ Bxyz sao cho :
 $B(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $C(0; b; 0)$,
 $B'(0; 0; h)$, $A'(a; 0; h)$, $C'(0; b; h)$.

10) Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác cân tại A, chọn hình 20, 21, 22.

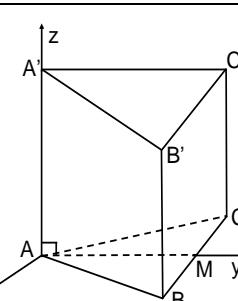
▪ Nếu ΔABC đều thì ngoài cách chọn ở các hình 20, 21, 22 thì có thể chọn hình 23.



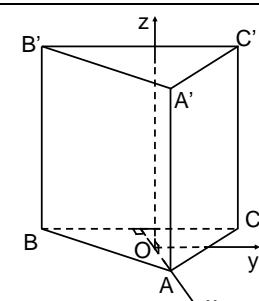
Hình 20



Hình 21



Hình 22



Hình 23

• **Chú ý :** Giải một bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ sẽ dễ dàng hơn đối với các hình đặc biệt như : hình tam diện vuông, hình tứ diện vuông, hình lập phương, hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz đúng, sẽ dẫn đến việc tìm tọa độ các điểm dễ dàng, việc này sẽ quyết định việc giải bài toán thành công. Tuy nhiên, không phải bài toán hình học không gian nào giải theo phương pháp tọa độ cũng dễ dàng. Nếu việc chọn các điểm làm cho bài toán có cách giải quá nặng nề thì cách tốt nhất là giải theo phương pháp cổ điển.

A. CÁC KIẾN THỨC LIÊN QUAN

I. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1) Định nghĩa : Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là vectơ \vec{c} vuông góc với \vec{a}, \vec{b} có tọa độ định bởi : $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

▪ Ký hiệu : $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ (đọc là tích có hướng của \vec{a}, \vec{b})

▪ Thí dụ : Cho $\vec{u} = (1; 0; -1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 1)$, ta có : $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1; -3; 1)$

2) Tính chất :

- \vec{a} cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$
- $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$ và $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$

3) Điều kiện đồng phẳng giữa 3 vectơ : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$

4) Vectơ không đồng phẳng : Nếu $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} \neq 0$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng

5) Cho tứ diện ABCD, ta có : $V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot d(D, (ABC))$

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng :

• Định nghĩa : Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là một vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (α), nếu vectơ \vec{n} có giá vuông góc với mặt phẳng (α). Ký hiệu $\vec{n} \perp (\alpha)$.

• Chú ý :

_ Nếu \vec{n} là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k \cdot \vec{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

_ Nếu mặt phẳng (α) qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì vectơ $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

2) Tính chất :

_ Mọi mặt phẳng có vô số pháp vectơ.

_ Hai mặt phẳng phân biệt có cùng một pháp vectơ thì song song với nhau.

_ Một mặt phẳng được xác định nếu biết một điểm và một pháp vectơ của nó.

3) Phương trình tổng quát của mặt phẳng :

Trong không gian Oxyz, phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\text{với } A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

• Nếu mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ thì phương trình tổng quát là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

4) Phương trình mặt phẳng theo đoạn chấn :

Mặt phẳng (P) cắt 3 trục Ox, Oy, Oz tại $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$: $(P) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1) Phương trình tổng quát của đường thẳng

$$(D) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2)$$

2) Phương trình tham số của đường thẳng

Đường thẳng (D) qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ có phương trình tham số là :

$$(D) : \begin{cases} x = x_0 + t.a_1 \\ y = y_0 + t.a_2 \\ z = z_0 + t.a_3 \end{cases} \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0 \text{ và } t \in \mathbb{R})$$

3) Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng (D) qua $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ có phương trình chính tắc là :

$$(D) : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (a_1, a_2, a_3 \neq 0)$$

IV. GÓC

- 1) Cho $mp(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ có $\vec{n}_\alpha = (A_1, B_1, C_1)$
 $mp(\beta) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có $\vec{n}_\beta = (A_2, B_2, C_2)$

Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng thỏa : $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- 2) Cho hai đường thẳng d, d' lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{u}' = (b_1, b_2, b_3)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d và d' , ta có :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq 90^\circ)$$

- 3) Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ và $mp(\alpha)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và $mp(\alpha)$, ta có :

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|a_1A + a_2B + a_3C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

V. KHOẢNG CÁCH

- 1) Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến $mp(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$: $d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

- 2) Khoảng cách từ điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ đến đường thẳng d :

Cho đường thẳng $d : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ và

một điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng d là : $d(M_1, (d)) = \frac{|[\overrightarrow{MM_1}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$

- 3) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (d) và (d') (đoạn vuông góc chung) :

Trong (Oxyz), cho hai đường thẳng d và d' :

Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$.

Đường thẳng d' đi qua $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (b_1, b_2, b_3)$.

Khoảng cách (đoạn vuông góc chung) giữa 2 đường thẳng chéo nhau d và d' là: $d((d), (d')) = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}']. \overrightarrow{MM'}|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD là: $d(AB, CD) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]. \overrightarrow{AC}|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]|}$

1) Tính tích có hướng và tích hổn tạp : Cho ba vectơ $\vec{u} = (3; 7; 0)$, $\vec{v} = (2; 3; 1)$, $\vec{w} = (3; -2; 4)$.

• **CASIO fx-570VN PLUS :**

MODE	8	1	1	3	=	7	=	0	=
MODE	8	2	1	2	=	3	=	1	=
MODE	8	3	1	3	=	-2	=	4	=

Bấm **[AC]**

Tính tích có hướng $[\vec{u}, \vec{v}]$: SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 = → (7 ; -3 ; -5)

Tính tích hổn tạp $[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}$:

Bấm **[AC]**

(SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) SHIFT 5 7 SHIFT 5 5 → 7 ≠ 0

Hoặc :

Tính tích có hướng $[\vec{u}, \vec{v}]$: SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 = → (7 ; -3 ; -5)

Lưu vào bộ nhớ SHIFT 5 6 → VctAns

Bấm tiếp SHIFT 5 7 → VctAns.

Tính tích hổn tạp $[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}$: SHIFT 5 5 → VctAns • VctC → 7 ≠ 0

• **CASIO fx-580VN X :**

MENU	5	1	3	3	=	7	=	0	=
OPTN	1	2	3	2	=	3	=	1	=
OPTN	1	3	3	3	=	-2	=	4	=

Bấm **[AC]**

Tính tích có hướng $[\vec{u}, \vec{v}]$: OPTN 3 X OPTN 4 = → (7 ; -3 ; -5)

Tính tích hổn tạp $[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}$:

Bấm **[AC]**

(OPTN 3 X OPTN 4) OPTN ▾ 2 OPTN 5 = → 7 ≠ 0

2) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết: A $\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$; B $\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$; C(1 ; 1 ; 1); D $\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$

• **CASIO fx-570VN PLUS :**

Tính \overrightarrow{AB} : MODE 8 1 1 0 - 1 = 1 ÷ 2 - 0 = 1 - 1 ÷ 2 = → $\overrightarrow{AB} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Tính \overrightarrow{CD} : MODE 8 2 1 1 ÷ 2 - 1 = 1 - 1 = 0 - 1 = → $\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$

Bấm **[AC]**

(SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) → (VctA • VctB)

÷ ((SHIFT hyp SHIFT 5 3) X (SHIFT hyp SHIFT 5 4)) = → 0.7071067812

(dòng trên có trên màn hình là : (VctA • VctB) ÷ (Abs(VctA) × (Abs(VctB))))

Nhấn : MODE 1 SHIFT cos Ans) = → 90 (tức là 90°) hoặc bấm thêm nút „ „ → $90^\circ'0''$

• **CASIO fx-580VN X :**

Tính \overrightarrow{AB} : MENU 5 1 3 0 - 1 = 1 ÷ 2 - 0 = 1 - 1 ÷ 2 = → $\overrightarrow{AB} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Tính \overrightarrow{CD} : OPTN 1 2 3 1 ÷ 2 - 1 = 1 - 1 = 0 - 1 = → $\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$

Bấm **[AC]**

OPTN ▾ 3 OPTN 3 SHIFT) OPTN 4) = → 90

Vậy góc giữa đường thẳng MP và C'N là 90° .

VÍ DỰ 1 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB', CD, A'D'. Tính góc giữa đường thẳng MP và C'N:

- A. 30°
- B. 120°
- C. 60°
- D. 90°

▪ **Hướng dẫn**

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho :

$$\begin{aligned}A(0; 0; 0); B(1; 0; 0); C(1; 1; 0); D(0; 1; 0) \\ A'(0; 0; 1); B'(1; 0; 1); C'(1; 1; 1); D'(0; 1; 1)\end{aligned}$$

Vì M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, A'D' nên $M\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$; $N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$; $P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$

$$\overrightarrow{MP} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \overrightarrow{C'N} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$$

Có thể không cần tính \overrightarrow{MP} ; $\overrightarrow{C'N}$ ngoài giấy mà tính luôn khi nhập vec-tơ như sau:

• **CASIO fx-570VN PLUS :**

Tính \overrightarrow{MP} : MODE 8 1 1 0 – 1 [=] 1 [÷] 2 – 0 [=] 1 – 1 [÷] 2 [=] $\rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Tính $\overrightarrow{C'N}$: MODE 8 2 1 1 [÷] 2 – 1 [=] 1 – 1 [=] 0 – 1 [=] $\rightarrow \overrightarrow{C'N} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$

Bấm **[AC]**

$$\begin{array}{l} (\text{ }) \text{ SHIFT } 5 \text{ } 3 \text{ } \text{SHIFT } 5 \text{ } 7 \text{ } \text{SHIFT } 5 \text{ } 4 \text{ } (\text{ }) \rightarrow (\text{VctA} \bullet \text{VctB}) \\ \div (\text{ }) \text{ SHIFT } \text{hyp} \text{ SHIFT } 5 \text{ } 3 \text{ } (\text{ }) \times (\text{ }) \text{ SHIFT } \text{hyp} \text{ SHIFT } 5 \text{ } 4 \text{ } (\text{ }) \text{ }) [=] \rightarrow 0.7071067812 \end{array}$$

(dòng trên có trên màn hình là : $(\text{VctA} \bullet \text{VctB}) \div (\text{Abs}(\text{VctA}) \times (\text{Abs}(\text{VctB})))$)

Nhấn : MODE 1 SHIFT cos Ans [=] $\rightarrow 90$ (tức là 90°) hoặc bấm thêm nút **[„ „]** $\rightarrow 90^\circ 0'0''$

• **CASIO fx-580VN X :**

Tính \overrightarrow{MP} : MENU 5 1 3 0 – 1 [=] 1 [÷] 2 – 0 [=] 1 – 1 [÷] 2 [=] $\rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Tính $\overrightarrow{C'N}$: OPTN 1 2 3 1 [÷] 2 – 1 [=] 1 – 1 [=] 0 – 1 [=] $\rightarrow \overrightarrow{C'N} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right)$

Bấm **[AC]**

$$\text{OPTN } \blacktriangleright \text{ 3 } \text{OPTN } \text{ 3 } \text{ SHIFT } (\text{ }) \text{ OPTN } \text{ 4 } \text{ }) \text{ [=]} \rightarrow 90$$

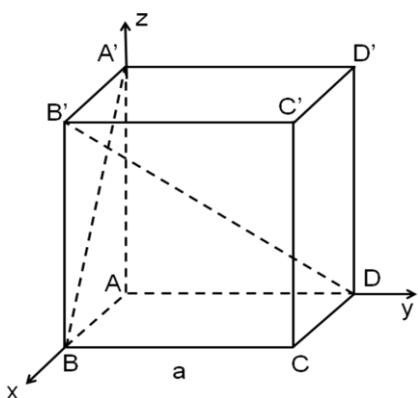
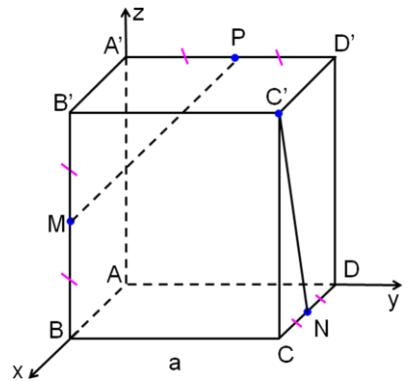
Vậy góc giữa đường thẳng MP và C'N là 90° .

VÍ DỰ 2 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

Khoảng cách giữa đường thẳng A'B và B'D:

- A. $a\sqrt{3}$
- B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
- C. $a\sqrt{6}$
- D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

▪ **Hướng dẫn**



Công thức: $d(d, d') = \frac{|\overrightarrow{[A'B, B'D]}. \overrightarrow{A'B}|}{|\overrightarrow{[A'B, B'D]}|}$

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: A(0 ; 0 ; 0)

Sau đó chọn các điểm sắp xếp như sau để tính các vec-tơ

A'(0 ; 0 ; 1) ; B'(1 ; 0 ; 1)

B(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; 1 ; 0)

VctA : Tính $\overrightarrow{A'B}$: MENU **5 1 3** 1-0 \equiv 0-0 \equiv 0-1 \equiv $\rightarrow \overrightarrow{A'B} = (1; 0; -1)$

VctB : Tính $\overrightarrow{B'D}$: OPTN **1 2 3** 0-1 \equiv 1-0 \equiv 0-1 \equiv $\rightarrow \overrightarrow{B'D} = (-1; 1; -1)$

VctC : Tính $\overrightarrow{A'B'}$: OPTN **1 3 3** 1-0 \equiv 0-0 \equiv 1-1 \equiv $\rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (1; 0; 0)$

Bấm **AC**

$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \cdot \text{VctC} \quad \boxed{\div} \quad \text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \rightarrow 0,4082482905$

Lưu vào biến X : STO X

Bấm MENU **1 √** **ALPHA** **(** **x²** **=** $\rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6} \rightarrow \frac{a\sqrt{6}}{6}$ (Bấm như vậy mới ra $\frac{\sqrt{6}}{6}$, còn không ra số thập phân)

VÍ ĐU 3 : Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$, biết $A'B = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A'C

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

▪ **Hướng dẫn**

Công thức: $d(AB, A'C) = \frac{|\overrightarrow{[AB, A'C]}. \overrightarrow{AA'}|}{|\overrightarrow{[AB, A'C]}|}$

ΔABC vuông cân tại A có: $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = a$

$\Delta A'AB$ vuông tại A có: $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: (Sắp như ở dưới cho dễ tính)

A(0 ; 0 ; 0) ; A'(0 ; 0 ; 2 $\sqrt{2}$)

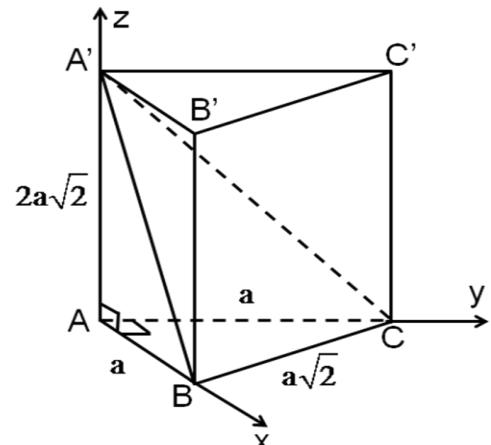
B(1 ; 0 ; 0) ; C(0 ; 1 ; 0)

VctA: $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$; VctB: $\overrightarrow{A'C} = (0; 1; -2\sqrt{2})$; VctC: $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2\sqrt{2})$

$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \cdot \text{VctC} \quad \boxed{\div} \quad \text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \rightarrow 0,9428090416$

Lưu vào biến X : STO X

Bấm MENU **1 √** **ALPHA** **(** **x²** **=** $\rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \frac{2a\sqrt{2}}{3}$



VÍ DỰ 4 : (ĐH D 2002) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

▪ Hướng dẫn

$$\Delta ABC \text{ có : } AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = BC^2$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A $\Rightarrow AB \perp AC$.

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho :

$$A(0; 0; 0); B(3; 0; 0); C(0; 4; 0); D(0; 0; 4)$$

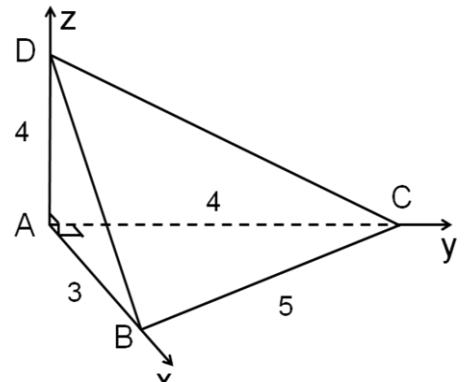
$$\overrightarrow{BC} = (-3; 4; 0); \overrightarrow{BD} = (-3; 0; 4)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (16; 12; 12) \text{ hay } (4; 3; 3)$$

$$\Rightarrow 4(x - 3) + 3(y - 0) + 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$$

$$\text{Hoặc : Phương trình (BCD)}: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$$

$$\Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{|0+0+0-12|}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}} = \frac{12}{\sqrt{34}} = \frac{12\sqrt{34}}{34} = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ (cm)}$$



VÍ DỰ 5 : (ĐH B 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = a $\sqrt{2}$, SA = a và SA \perp (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng (SAC) \perp (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

▪ Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } V_{ANIB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}] \cdot \overrightarrow{AI}|$$

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho :

$$A(0; 0; 0); B(1; 0; 0); C(1; \sqrt{2}; 0); D(0; 1; 0); S(0; 0; 1)$$

$$M \text{ là trung điểm của } AD \text{ nên } M\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$N \text{ là trung điểm của } SC \text{ nên } N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$BD \cap AC = H \Rightarrow AH$ và BM là 2 đường trung tuyến của ΔABD . Hai đường trung tuyến này cắt nhau tại I nên I là trọng tâm của ΔABD

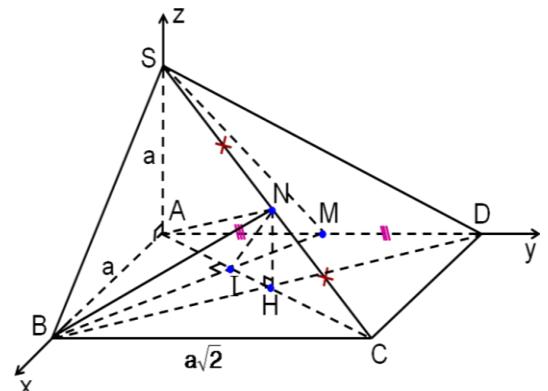
$$\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -2(0-x) \\ \sqrt{2}-y = -2(0-y) \\ 0-z = -2(0-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ 3y = \sqrt{2} \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; 0\right)$$

$$\text{VctA: } \overrightarrow{AB} = (1; 0; 0); \text{ VctB: } \overrightarrow{AN} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right); \text{ VctC: } \overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; 0\right)$$

$$\text{Abs}((\text{VctA} \times \text{VctB}) \bullet \text{VctC}) \rightarrow 0,03928371007$$

Lưu vào biến X : STO X

$$\text{Bấm MENU } 1 \text{ ALPHA } \text{ (} x^2 \text{) } \text{ Ans } \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{36} \rightarrow \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$$



BÀI 1 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB', CD, A'D'. Tính góc giữa đường thẳng MP và C'N:

- A. 30° B. 120° C. 60° D. 90°

BÀI 2 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', BC, DD'. Tính góc giữa đường thẳng AC' và (MNP):

- A. 30° B. 120° C. 60° D. 90°

BÀI 3 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa đường thẳng A'B và B'D:

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $a\sqrt{6}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

BÀI 4 : (ĐỀ MINH HỌA 2018) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và A'C' bằng

- A. $\sqrt{3}a$ B. a C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ D. $\sqrt{2}a$

BÀI 5 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M, N, lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và A'C:

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

BÀI 6 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, C'D' và DD'. Tính thể tích khối tứ diện MNPQ.

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{24}$

BÀI 7 : (THPT QG 2018) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông A'B'C'D' và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng ($MC'D'$) và (MAB) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$ B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$ C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$ D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

BÀI 8 : (ĐỀ MINH HỌA 2018) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Góc giữa hai mặt phẳng ($A'B'CD$) và ($ABC'D'$) bằng

- A. 30° B. 60° C. 45° D. 90°

BÀI 9 : (ĐH B 2002) Cho hình lập phương ABCDA₁B₁C₁D₁ có cạnh bằng a.

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A₁B và B₁D.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB₁, CD, A₁D₁. Tính góc giữa MP và C₁N.

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

BÀI 10 : (ĐH A 2003) Trong không gian Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, B(a ; 0 ; 0), D(0 ; a ; 0), A'(0 ; 0 ; b) ($a > 0, b > 0$). Gọi M là trung điểm CC'.

a) Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b.

- A. $\frac{1}{4}a^2b$ B. $\frac{1}{2}a^2b$ C. $\frac{1}{4}ab^2$ D. $\frac{1}{2}ab^2$

b) Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

- A. $\frac{a}{b} = 1$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

BÀI 11 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Lấy điểm M thuộc AD', điểm N thuộc

đoạn BD sao cho $AM = DN = x \left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

- A. $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ C. $x = \frac{a}{3}$ D. $x = \frac{a}{2}$

BÀI 12 : Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$, biết $A'B = 3a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A'C

- A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

BÀI 13 : Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có cạnh $BC = \sqrt{2}$, biết $A'B = 3a$. Gọi I là giao điểm của AC' và A'C. Tính khoảng cách từ I đến (BCC'B').

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

BÀI 14 : (ĐỀ MINH HỌA 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', A'C' và BC. Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AB'C') và (MNP) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$ C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$ D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$

BÀI 15 : (ĐH D 2002) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

- A. $\frac{6\sqrt{34}}{17}$ B. $\frac{3\sqrt{34}}{17}$ C. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ D. $\frac{\sqrt{34}}{17}$

BÀI 16 : (ĐH B 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

- A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{72}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{72}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{36}$

BÀI 17 : (ĐH A 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° .

a) Tính thể tích khối chóp S.BCNM theo a.

- A. $2a^3\sqrt{3}$ B. $a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

b) Tính khoảng cách giữa AB và SN theo a.

- A. $\frac{3a\sqrt{12}}{13}$ B. $\frac{2a\sqrt{12}}{13}$ C. $\frac{a\sqrt{12}}{13}$ D. $\frac{4a\sqrt{12}}{13}$

BÀI 18 : (ĐỀ MINH HỌA 2018) Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa 2 đường thẳng OM và AB bằng
A. 90° B. 30° C. 60° D. 45°

BÀI 19 : (THPT QG 2018) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$ B. $\frac{2a}{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

1D	2D	3D	4B	5B	6D	7B	8D	9a) A	9b) C	10b) A	10b) A
11A	12A	13B	14A	15A	16C	17a) B	17b) C	18C	19B		