

THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

I. HÌNH CHÓP ĐỀU

BÀI 1.1 : Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a.

BÀI 1.2 : Tính thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a và thể tích khối bát diện đều cạnh a

BÀI 1.3 : Hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng nhau và có $V = \frac{9\sqrt{2}a^3}{2}$.

Chứng minh rằng S.ABCD là hình chóp tứ giác đều. Tính cạnh của hình chóp.

BÀI 1.4 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a và α trong mỗi trường hợp sau :

a) α là góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

b) α là góc giữa mặt bên và mặt đáy.

c) α là góc giữa đường cao và mặt bên.

d) α là góc ở đỉnh của mặt bên.

BÀI 1.5 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm của ΔSAC và khoảng cách từ G đến mặt bên (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy đến (SCD) và $V_{S.ABCD}$.

BÀI 1.6 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh a. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết rằng $AB = a$ và $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

BÀI 1.7 : (ĐH B 2004) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tan của góc giữa (SAB) và (ABCD) theo φ . Tính $V_{S.ABCD}$ theo a và φ .

BÀI 1.8 : (ĐH B 2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

BÀI 1.9 : (ĐH A 2002) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN , biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.

BÀI 1.10 : (ĐH B 2012) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh $SC \perp (ABH)$. Tính thể tích của khối chóp S.ABH theo a.

BÀI 1.11 : (TN 07-08 LẦN 1) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $SA \perp BC$ và tính thể tích khối chóp S.ABM theo a.

BÀI 1.12 : (CĐ D 2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp S.ABCD.

BÀI 1.13 : (CĐ 2009) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, và CD. Chứng minh $MN \perp SP$ và tính thể tích của khối tứ diện AMNP.

BÀI 1.14 : Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng a và góc hợp bởi cạnh AB với mặt phẳng (SBC) bằng 30° . Tính thể tích hình chóp S.ABC.

BÀI 1.15 : Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có góc hợp bởi cạnh bên và đáy là α . Khoảng cách ngắn nhất giữa cạnh đáy và cạnh bên đối diện bằng a. Tính thể tích của khối chóp.

ĐS : 1) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; 2) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; 3) $3a$; 4) a) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \tan \alpha$; b) $V = \frac{a^3}{6} \tan \alpha$; c) $V = \frac{a^3}{6} \cot \alpha$; d)

$V = \frac{a^3}{6} \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$; 5) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$; 6) $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$; 7) $\sqrt{2} \tan \varphi$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \tan \varphi$; 8) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; 9) $S = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$; 10) $V = \frac{7a^3\sqrt{11}}{96}$;

11) $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$; 12) $\frac{1}{\sqrt{11}}$; 13) $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}$; 14) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; 15) $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{27 \sin^2 \alpha \cos \alpha}$.

II. HÌNH CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

BÀI 2.1 : (ĐH D 2002) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

BÀI 2.2 : Cho hình chóp S.ABC có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, góc ABC bằng 120° . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 2.3 : Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh BC. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SI cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Biết rằng $V_{SABC} = 4.V_{SAMN}$. Hãy tính V_{SABC}

BÀI 2.4 : (ĐH D 2006) Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Tính $V_{A.BCNM}$.

BÀI 2.5 : (ĐH B 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng (SAC) \perp (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

BÀI 2.6 : (ĐH D 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, góc $ABC = \text{góc } BAD = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh ΔSCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

BÀI 2.7 : (ĐH A 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính $V_{S.BCNM}$ và $d(AB ; SN)$ theo a.

BÀI 2.8 : (ĐH D 2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, góc BAD bằng 120° . Gọi M là trung điểm của BC và góc SMA bằng 45° . Tính $V_{S.ABCD}$ và $d(D, (SBC))$.

BÀI 2.9 : (THPT QG 2015) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ACBD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SC và (ACBD) bằng 45° . Tính V_{SABCD} và $d(SB, AC)$ theo a.

BÀI 2.10 : (TN 05-06) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, SB bằng $a\sqrt{3}$. Tính $V_{S.ABCD}$ và chứng minh trung điểm của SC là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

BÀI 2.11 : (TN 06-07 LẦN 1) Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = AB = BC = a$. Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

BÀI 2.12 : (TN 06-07 LẦN 2) Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = AC$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

BÀI 2.13 : (TN 07-08 LẦN 2) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$ và $SA = 3a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC. Tính $V_{S.ABC}$ và tính độ dài đoạn thẳng BI.

BÀI 2.14 : (TN 08-09) Cho hình chóp S.ABC có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc BAC = 120° . Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

BÀI 2.15 : (TN 09-10) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

BÀI 2.16 : (TN 10-11) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AD = CD = a$, $AB = 3a$, SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy 1 góc 45° . Tính V_{SABCD} .

BÀI 2.17 : (TN 12-13) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường SD tạo với (SAB) một góc 30° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

BÀI 2.18 : (CĐ 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

BÀI 2.19 : (CĐ A 2007) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a.

BÀI 2.20 : (CĐ 2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, góc $ABC = \text{góc } BAD = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh rằng BCNM là hình chữ nhật và tính thể tích của khối chóp S.BCNM theo a.

BÀI 2.21 : (CĐ 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tính V_{SABM} .

BÀI 2.22 : (CĐ 2014) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và tính $d(B, (SCD))$.

ĐS : 1) $\frac{6\sqrt{34}}{17}$; 2) $\frac{3a}{\sqrt{22}}$; 3) $V = \frac{a^3}{8}$; 4) $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$; 5) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$; 6) $\frac{a}{3}$; 7) $V = a^3\sqrt{3}$; $\frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$; 8) $\frac{a^3}{4}, \frac{a\sqrt{6}}{4}$;
 9) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; 10) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; 11) $\frac{1}{6}a^3$; 12) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; 13) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$; $BI = \frac{a\sqrt{13}}{2}$; 14) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$; 15) $V = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$;
 16) $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$; 17) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$; 18) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; 19) $\frac{6a}{5}$; 20) $V = \frac{a^3}{3}$; 21) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$; 22) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

III. HÌNH CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

BÀI 3.1 : (TN 13-14) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $SC = 2a\sqrt{5}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh AB. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

BÀI 3.2 : (ĐH D 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; (SBC) vuông góc với (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và góc $SBC = 30^\circ$. Tính $V_{S.ABC}$ và $d(B ; (SAC))$ theo a.

BÀI 3.3 : (ĐH D 2014) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính $V_{S.ABC}$ và khoảng cách giữa SA, BC.

BÀI 3.4 : (ĐH A 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và thể tích của khối tứ diện CMNP.

BÀI 3.5 : (ĐH A, A1 2014) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SD = 3a/2$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính V_{SABCD} và $d(A, (SBD))$.

BÀI 3.6 : (ĐH B 2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

BÀI 3.7 : (ĐH A 2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

BÀI 3.8 : (ĐH D 2003) Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mp(P) lấy điểm C, trong mp(Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và $d(A ; (BCD))$.

BÀI 3.9 : (ĐH A, A1 2012) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

BÀI 3.10 : (ĐH A, A1 2013) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A. góc ABC bằng 30° , SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính $V_{S.ABC}$ và $d(C, (SAB))$.

BÀI 3.11 : (ĐH B 2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp SABCD và $d(A, (SCD))$.

BÀI 3.12 : (CĐ 2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = SB$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính $V_{S.ABCD}$.

BÀI 3.13 : (CĐ 2012) Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng 60° . Tính V_{SABM} và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

BÀI 3.14 : Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $(SBC) \perp (ABC)$, $SA = SB = a$
 1) Chứng minh rằng ΔSBC là tam giác vuông. 2) Cho $SC = x$. Tính thể tích khối chóp theo a và x.

BÀI 3.15 : Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh A, $AB = AC = a$. Mặt bên qua cạnh huyền BC vuông với mặt đáy, hai mặt bên còn lại đều hợp với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Hãy tính thể tích của khối chóp S,ABC.

BÀI 3.16 : Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2a$, góc $ACB = 30^\circ$, Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là trung điểm của cạnh AC và $SH = \sqrt{2}a$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

$$\text{ĐS: } 1) \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}; 2) 2a^3\sqrt{3}; \frac{6a\sqrt{7}}{7}; 3) \frac{a^3\sqrt{3}}{24}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 4) \frac{\sqrt{3}a^3}{96}; 5) \frac{a^3}{3}; \frac{2a}{3}; 6) \frac{a^3\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{5}; 7) \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}; 8) \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 9) \frac{a^3\sqrt{7}}{12};$$

$$\frac{a\sqrt{42}}{8}; 10) \frac{a^3}{16}, \frac{a\sqrt{39}}{13}; 11) \frac{a^3\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{21}}{7}; 12) \frac{a^3\sqrt{5}}{6}; 13) \frac{a^3\sqrt{3}}{3}; \frac{2a\sqrt{3}}{3}; 14) \frac{ax}{12}\sqrt{3a^2-x^2}; 15) \frac{a^3\sqrt{3}}{12}; 16) \frac{\sqrt{6}a^3}{6}; \frac{\sqrt{66}a}{11}$$

IV. HÌNH CHÓP KHÁC

BÀI 4.1 : (ĐH A 2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD; H = CN ∩ DM. Biết SH ⊥ (ABCD) và SH = a√3. Tính V_{S_{CDMN}} và d(DM, SC) theo a

BÀI 4.2 : (ĐH D 2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, AC = 4.AH. Gọi CM là đường cao của ΔSAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

V. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

BÀI 5.1 : (ĐH D 2009) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

BÀI 5.2 : (ĐH D 2008) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA' = a√2. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính V_{ABC.A'B'C'} và d(AM, B'C).

BÀI 5.3 : (ĐH B 2010) Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa (A'BC) và (ABC) bằng 60°. Gọi G là trọng tâm ΔA'BC. Tính V_{ABC.A'B'C'} và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

BÀI 5.4 : (ĐH B 2003) Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc BAD = 60°. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

BÀI 5.5 : (CĐ 2013) Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có AB = a và đường thẳng A'B tạo với đáy một góc bằng 60°. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và B'C'. Tính V_{ABC.A'B'C'} và độ dài MN.

VI. HÌNH LĂNG TRỤ XIÊN

BÀI 5.6 : (ĐH A 2008) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = a√3 và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

BÀI 5.7 : (ĐH B 2009) Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60°; ΔABC vuông tại C và góc BAC = 60°. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

BÀI 5.8 : (ĐH B 2014) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa A'C và mặt đáy bằng 60°. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ điểm B đến (ACC'A').

BÀI 5.9 : (ĐH B 2011) Cho lăng trụ ABCD.A₁B₁C₁D₁ có đáy ABCD là hình chữ nhật. AB = a, AD = a√3. Hình chiếu vuông góc của điểm A₁ trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD₁A₁) và (ABCD) bằng 60°. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và d(B₁, (A₁BD)) theo a.

BÀI 5.10 : (THPT QG 2016) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AC = 2a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC, đường thẳng A'B tạo với (ABC) một góc 45°. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và chứng minh A'B ⊥ B'C.

VII. HÌNH HỘP

BÀI 5.11 : (ĐH D 2012) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, ΔA'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích của khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

$$\text{ĐS: } 1) \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}; \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}; 2) \frac{a^3\sqrt{14}}{48}; 3) \frac{4a^3}{9}; \frac{2a\sqrt{5}}{5}; 2) \frac{a^3\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{7}}{7}; 3) \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}; R = \frac{7a}{12}; 4) a\sqrt{2}; 5) \frac{3a^3}{4};$$

$$\frac{a\sqrt{13}}{2}; 6) \frac{a^3}{2}, \cos \varphi = \frac{1}{4}; 7) V = \frac{9a^3}{208}; 8) \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}; \frac{3a\sqrt{13}}{13}; 9) V = \frac{3a^3}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 10) V = a^3; 11) \frac{a^3\sqrt{2}}{48}; \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

KHỐI ĐA DIỆN - THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

I. HÌNH CHÓP

1) **Định nghĩa** : Cho hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$ thì cần hiểu rằng đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nằm trong mặt phẳng (P) và điểm S không thuộc mặt phẳng (P).

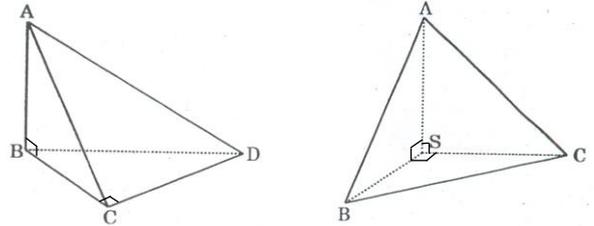
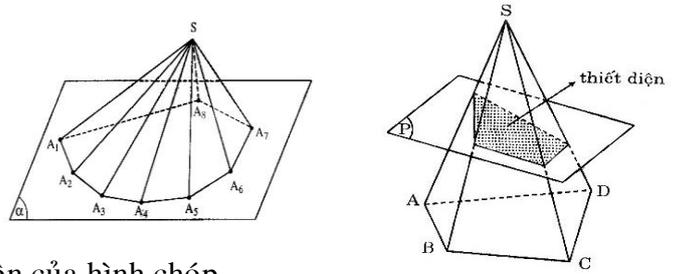
- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ gọi là đáy của hình chóp.
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ gọi là các mặt bên của hình chóp.
- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau và các cạnh bên bằng nhau.
- Hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau và các cạnh bên bằng nhau.
- Trong một hình chóp đều ta có :

- a) Chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- b) Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- c) Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.
- d) Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

2) **Định lý 2** : Thể tích của một khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp đó.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h \quad \text{hay} \quad V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

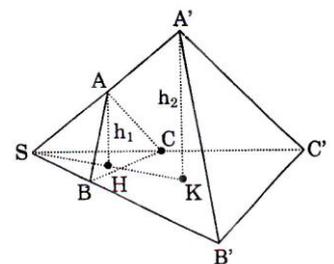
$S_{\text{đáy}}$ (hay B) : diện tích mặt đáy.
 h : chiều cao khối chóp (khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy)



• **Chú ý** :

- 1) Tứ diện ABCD có ba cạnh AB, BC, CD vuông góc với nhau từng đôi một thì có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot CD$
- 2) Tứ diện SABC có ba cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một thì có $V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC$
- 3) Hình chóp có các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau thì chân đường cao là tâm đường tròn nội tiếp đáy hình chóp.
- 4) Hình chóp có bốn mặt đều là những tam giác gọi là hình tứ diện. Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau gọi là tứ diện đều. Tứ diện gần đều là tứ diện có các cạnh đối diện bằng nhau.
- 5) Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao của hình chóp.
- 6) Hình chóp có hai mặt bên kề nhau vuông góc với đáy thì đường cao là cạnh chung của hai mặt bên này.
- 7) Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao của hình chóp nằm trên mặt bên đó.
- 8) Hình chóp có một mặt chéo vuông góc với đáy thì chiều cao của hình chóp chính là chiều cao của mặt chéo đó.
- 9) Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- 10) Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của các khối đa diện nhỏ.
- 11) Sử dụng kết quả sau để làm bài tập : Cho hình chóp S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Ta có :

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$



- **Chú ý** : _ Hai hình chóp có cùng diện tích đáy thì tỉ số thể tích bằng tỉ số hai đường cao tương ứng.
- _ Hai hình chóp có cùng chiều cao thì tỉ số thể tích bằng tỉ số hai diện tích đáy tương ứng.

II. HÌNH LĂNG TRỤ

1) Các yếu tố của hình lăng trụ : $A_1A_2A_3A_4A_5.A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$.

• Đáy : $A_1A_2A_3A_4A_5 ; A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$.

• Mặt bên : $A_1A_2A'_2A'_1, \dots$ là hình bình hành.

• Cạnh bên : $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots$ song song và bằng nhau.

• Ta nói : Lăng trụ tam giác nếu đáy là tam giác, Lăng trụ tứ giác nếu đáy là tứ giác, ...

• Khối lăng trụ có mặt bên là hình bình hành, các cạnh bên song song và bằng nhau.

• Khối lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy. Do đó, trong lăng trụ đứng thì cạnh bên cũng là chiều cao và các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

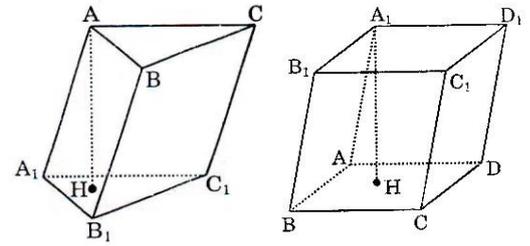
• Khối lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Trong lăng trụ đều thì các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.

▪ **Chú ý :** Nhớ rằng :

• “Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $a...$ ” thì hiểu đây là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh bằng a .

• “Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $a...$ ” thì hiểu đây là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh bằng a .

• Còn nếu “Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a...$ ” thì hiểu đây chỉ là hình lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều cạnh a .



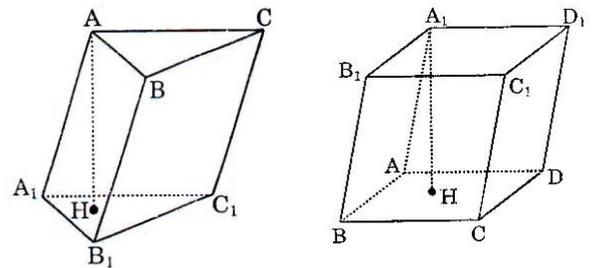
Định nghĩa	Tính chất	Hình minh họa
<ul style="list-style-type: none"> Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy. 	<ul style="list-style-type: none"> Các mặt bên hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật. Các mặt bên hình lăng trụ đứng vuông góc với mặt đáy. Chiều cao là cạnh bên. 	
<ul style="list-style-type: none"> Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. 	<ul style="list-style-type: none"> Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau. Chiều cao là cạnh bên. 	

2) Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó.

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h \quad \text{hay} \quad V = B \cdot h$$

$S_{\text{đáy}}$ (hay B) : diện tích mặt đáy.

h : chiều cao khối lăng trụ (khoảng cách giữa hai đáy)



III. HÌNH HỘP

1) Hình hộp là hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành.

2) Các yếu tố của hình hộp :

▪ Có 6 mặt đều là hình bình hành trong đó có 3 cặp mặt đối diện bằng nhau có thể chọn làm đáy.

▪ Có 8 đỉnh và 12 cạnh chia làm 3 nhóm, mỗi nhóm 4 cạnh song song và bằng nhau.

▪ Có 4 đường chéo : $AC', A'C, BD', B'D$ đồng quy tại O là trung điểm của mỗi đoạn. Điểm O gọi là tâm hình hộp.

• **Chú ý :**

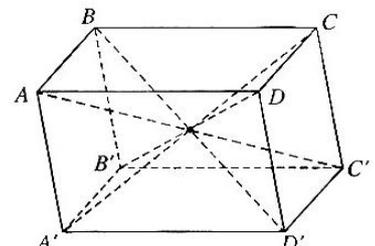
_ Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với đáy.

_ Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

_ Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau.

3) Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước.

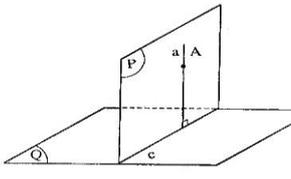
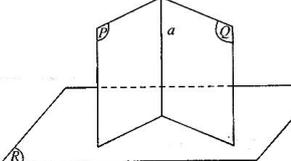
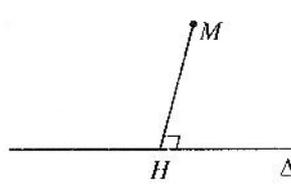
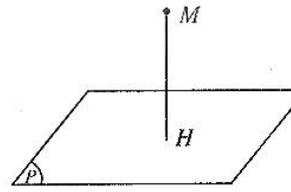
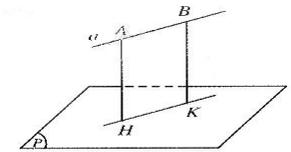
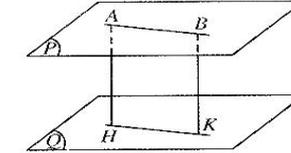
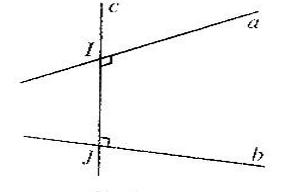
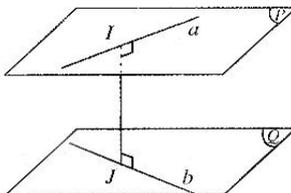
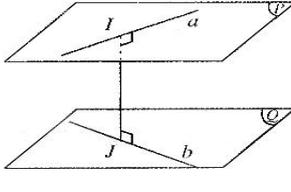
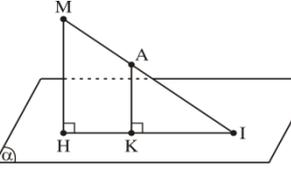
$$V = a \cdot b \cdot c$$



MỘT SỐ ĐỊNH LÝ-TÍNH CHẤT HHKG

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

CÁC ĐỊNH LÝ	HÌNH VẼ	MINH HỌA
<p>1) Định lý 1 : Cho đường thẳng a song song với $mp(\alpha)$. Nếu $mp(\beta)$ đi qua a và cắt $mp(\alpha)$ thì giao tuyến của mặt phẳng (α) và (β) song song với đường thẳng a.</p>		$\left. \begin{array}{l} a // mp(\alpha) \\ a \subset mp(\beta) \\ mp(\alpha) \cap mp(\beta) = b \end{array} \right\} \Rightarrow b // a$
<p>2) Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng vuông góc với AB tại trung điểm O của đoạn thẳng AB.</p>		$\left\{ \begin{array}{l} O \text{ là trung điểm đoạn } AB \\ mp(P) \perp AB \text{ tại } O. \end{array} \right.$
<p>3) Tính chất 1 : a) Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại. b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.</p>		$\left. \begin{array}{l} mp(P) // mp(Q) \\ a \perp mp(P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp mp(Q)$ $\left. \begin{array}{l} mp(P) \perp a \\ mp(Q) \perp a \\ mp(P) \neq mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow mp(P) // mp(Q)$
<p>4) Tính chất 2 : a) Cho đường thẳng a và $mp(P)$ song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với $mp(P)$ thì cũng vuông góc với a. b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.</p>		$1) \left. \begin{array}{l} a // mp(P) \\ b \perp mp(P) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp a$ $2) \left\{ \begin{array}{l} mp(P) \perp b \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \subset mp(P) \\ a // mp(P) \end{array} \right.$ $3) \left\{ \begin{array}{l} a \not\subset mp(P) \\ a \perp b \\ mp(P) \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a // mp(P)$
<p>5) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng Cho đường thẳng a không vuông góc với $mp(P)$. Góc giữa đường thẳng a và $mp(P)$ là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên $mp(P)$.</p>		<ul style="list-style-type: none"> • $(a, mp(P)) = (a, a')$ • $0^\circ \leq (a, (P)) \leq 90^\circ$ • $(a, (P)) = 0^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a // (P) \\ a \subset (P) \end{array} \right.$ • $(a, (P)) = 90^\circ \Leftrightarrow a \perp (P)$
<p>6) Định lý 2 : Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt chiếu.</p>		$S' = S \cdot \cos \varphi$ <p>S là diện tích của ΔABC, S' là diện tích của $\Delta ABC'$ là hình chiếu của ΔABC trên $mp(P)$ và φ là góc giữa $mp(P)$ và $mp(ABC)$</p>
<p>7) Định lý 3 : Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.</p>		$\left. \begin{array}{l} a \subset mp(P) \\ a \perp mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow mp(P) \perp mp(Q)$
<p>8) Định lý 4 : Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.</p>		$\left. \begin{array}{l} mp(P) \perp mp(Q) \\ mp(P) \cap mp(Q) = c \\ a \subset mp(P) \\ a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp mp(Q)$

<p>9) Hệ quả 1 : Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trên mp(P) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với mp(Q) sẽ nằm trong mp(P).</p>		$\left. \begin{array}{l} mp(P) \perp mp(Q) \\ A \in mp(P) \\ A \in a \\ a \perp mp(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset mp(P)$
<p>10) Hệ quả 2 : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.</p>		$\left. \begin{array}{l} mp(P) \cap mp(Q) = a \\ mp(P) \perp mp(R) \\ mp(Q) \perp mp(R) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp mp(R)$
<p>11) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng : Cho điểm M và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của M lên Δ. Độ dài đoạn thẳng MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a.</p>		<ul style="list-style-type: none"> • MH là nhỏ nhất so với khoảng cách từ M đến mọi điểm của Δ. • $MH = 0 \Leftrightarrow M \in \Delta$
<p>12) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng : Cho điểm M và mp(P). Gọi H là hình chiếu của M lên mp(P). Độ dài của đoạn thẳng MH được gọi là khoảng cách từ M đến mp(P)</p>		<ul style="list-style-type: none"> • MH là nhỏ nhất so với khoảng cách từ M đến mọi điểm của mp(P) • $MH = 0 \Leftrightarrow M \in mp(P)$
<p>13) Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nó : Khoảng cách giữa đường thẳng a và (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến (P).</p>		<p>Nếu $a \parallel mp(P)$ thì $d(A ; (mp(P))) = d(B ; (mp(P)))$</p>
<p>14) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song : Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.</p>		<p>Nếu $mp(P) \parallel mp(Q)$ thì $d(mp(P) ; mp(Q)) =$ $= d(A ; (mp(Q))) = d(K ; (mp(P)))$</p>
<p>15) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b : Đường thẳng c cắt cả a và b đồng thời vuông góc với cả a và b nên đường thẳng c là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.</p>		<p>Nếu $\begin{cases} c \cap a = I \text{ và } c \perp a = I \\ c \cap b = J \text{ và } c \perp b = J \end{cases}$ thì c là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.</p>
<p>16) Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau : Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng.</p>		$\left. \begin{array}{l} IJ \perp a \\ IJ \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow IJ \text{ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.}$
<p>17) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau : Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.</p>		<p>a và b chéo nhau $\Rightarrow IJ = d(a ; b)$ $= d(a ; mp(Q)) = d(b ; mp(P)) =$ $= d(mp(P) ; mp(Q))$ (IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b)</p>
<p>18) Tỷ số khoảng cách :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Chú ý : Khi biết $d(A, (\alpha)) = x$ • Nếu $MA \parallel (\alpha) \Rightarrow d(M, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$ • Nếu $MA \cap (\alpha) = I \Rightarrow \frac{d(M, (\alpha))}{d(A, (\alpha))} = \frac{IM}{IA}$ 		

MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ TRONG QUAN HỆ VUÔNG GÓC

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA CỦA KHÁI NIỆM VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1) Góc giữa hai đường thẳng bất kì a và b trong không gian là góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với a và b . Góc đó nhỏ nhất là 0° và lớn nhất là 90° . Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

▪ *Chú ý rằng hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc không cắt nhau.*

2) Một đường thẳng a được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu có vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) .

▪ Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) chỉ cần chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (P) .

3) Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

II. CÁC TÍNH CHẤT

1) Qua một điểm đã cho có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng đã cho.

2) Qua một điểm đã cho có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng đã cho.

3) Qua một đường thẳng a đã cho có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) đã cho nếu a không vuông góc với (P) . Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng qua a đều vuông góc với mặt phẳng (P) .

4) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó (nếu có) cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

5) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

6) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

7) Đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng (hoặc một mặt phẳng) thì a song song mặt phẳng (P) hoặc a nằm trên mặt phẳng (P) .

III. CÁC KHÁI NIỆM LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH VUÔNG GÓC

1) Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) : là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) : hình chiếu vuông góc của điểm M trong không gian là chân đường vuông góc hạ từ M xuống mặt phẳng (P) .

2) Định lý ba đường vuông góc : cho đường thẳng a' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) và b là một đường thẳng nằm trong (P) . Trong trường hợp đó : đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với đường thẳng a' .

3) Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng : là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng đó tại trung điểm của nó. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB chính là quỹ tích những điểm cách đều hai điểm A và B .

4) Phép đối xứng qua một mặt phẳng (P) : đó là phép đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' .

IV. KHOẢNG CÁCH

1) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d là độ dài đoạn thẳng $AH \perp d$ với $H \in d$.

2) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là độ dài đoạn thẳng $AH \perp mp(P)$ với $H \in d$.

3) Khoảng cách giữa một đường thẳng là một mặt phẳng song song với nó là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của đường thẳng đến mặt phẳng đó.

4) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

5) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài đoạn vuông góc chung của chúng. Khoảng cách đó cũng bằng :

• Khoảng cách giữa một trong 2 đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

V. GÓC

1) Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) .

2) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

(Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°)

3) **Nhi diện** : là hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng có bờ chung, bờ chung này gọi là *cạnh của nhị diện*.

4) **Diện tích hình chiếu** : nếu S là diện tích của một đa giác phẳng, S' là diện tích hình chiếu của đa giác đó trên mặt phẳng (P) , và φ là góc giữa mặt phẳng chứa đa giác và $mp(P)$ thì ta có công thức : $S' = S \cos \varphi$.

VI. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

1) Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau

Để giải các bài tập loại này ta thường dùng các cách sau :

- Chứng minh đường thẳng này vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia.
- Dùng định lí ba đường vuông góc.
- Chứng minh đường thẳng này vuông góc với một đường thẳng (hay một mặt phẳng) song song với đường thẳng kia.
- Đưa về chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong mặt phẳng nếu hai đường thẳng đó nằm trong cùng một mặt phẳng (dùng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đường chéo của hình thoi, hình vuông, góc nội tiếp trong nửa đường tròn, định lí Pitago ...)

2) Chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng (đường thẳng a vuông góc với $mp(\alpha)$)

- Chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) .
- Chứng minh đường thẳng a song song với một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) .
- Chứng minh đường thẳng $a \subset$ mặt phẳng (β) , trong đó mặt phẳng $(\beta) \perp$ mặt phẳng (α) và a vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) .
- Chứng minh đường thẳng a là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng (α) .

3) Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau

- Chứng minh một trong hai mặt phẳng có chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng là góc vuông.

4) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b

- Xác định đoạn vuông góc chung rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung đó.
- Qua b xác định $mp(\alpha) // a$. Tính khoảng cách giữa a và $mp(\alpha)$, đó chính là khoảng cách giữa a và b .
- Xác định hai mặt phẳng song (P) và (Q) lần lượt chứa a và b . Tìm khoảng cách giữa (P) và (Q) , đó chính là khoảng cách giữa a và b .

▪ **Chú ý** : Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b , với a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy, ta làm như sau :

Gọi I là giao điểm của đường thẳng a với mặt đáy. Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b (ta cũng có thể dựng tứ giác đặc biệt để có thể dễ dàng tính được độ dài các cạnh hơn). Lúc đó b song song với $mp(P)$ chứa a và Δ . Chọn một điểm M trên b sao cho có thể tính khoảng cách đến $mp(P)$. Khoảng cách từ M đến $mp(P)$ bằng khoảng cách giữa a và b .

5) Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.

▪ Trước tiên ta xác định các góc này dựa vào định nghĩa :

- Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau được xác định bằng góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn hợp bởi đường thẳng đó và hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng.
- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Trong trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau thì góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến tại một điểm.

▪ Sau đó dựa vào các hệ thức liên hệ giữa góc với độ dài trong hình học phẳng để xác định góc đó.

LÝ THUYẾT TRẮC NGHIỆM

- 1) Hình đa diện có ít mặt nhất là tứ diện. Trong mỗi tứ diện thì mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh.
Hoặc : Không có hình đa diện nào mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của một cạnh hoặc hai cạnh.
- 2) Khối chóp đáy n -giác thì có n mặt bên, một mặt đáy nên số mặt của khối chóp là $n + 1$.
 Đáy của hình chóp có n đỉnh, thêm đỉnh của hình chóp nên số đỉnh của khối chóp là $n + 1$.
 Suy ra khối chóp n -giác có $2n$ cạnh, $n + 1$ mặt, $n + 1$ đỉnh.
- 3) Những đường thẳng nằm trong $mp(P)$ thì biến thành chính nó. Một điểm nằm trên đường thẳng vuông góc với $mp(P)$ thì điểm đối xứng với nó qua $mp(P)$ cũng nằm trên đường thẳng ấy, tức là đường thẳng vuông góc với $mp(P)$ thì biến thành chính nó. Vậy để d trùng với d' thì $d \subset mp(P)$ hoặc $d \perp mp(P)$.
- 4) Phép đối xứng qua mặt phẳng chứa đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau d và d' và vuông góc với $mp(d, d')$ biến d thành d' . Vì hai đường thẳng cắt nhau d, d' có hai phân giác nên có hai phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d' .
- 5) Nếu d, d' phân biệt và đồng phẳng nên $d // d'$ hoặc d cắt d' .
 _ Nếu $d // d'$ thì có một phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d' (đó là mặt phẳng vuông góc với $mp(d, d')$ và cách đều d, d')
 _ Nếu d cắt d' , có phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d' .
- 6) Tứ diện đều ABCD có 6 mặt phẳng đối xứng, đó là các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện.
- 7) Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh CD thì phép đối xứng qua $mp(ABM)$ biến $A \rightarrow A, B \rightarrow B, C \rightarrow D, D \rightarrow C$. Như vậy, phép đối xứng đó biến tứ diện ABCD thành chính nó, suy ra $mp(ABM)$ là mặt phẳng đối xứng của tứ diện ABCD.
- 8) Hình chóp tứ giác đều có bốn mặt đối xứng, đó là hai mặt phẳng chéo : $mp(SAC), mp(SBD)$. Các mặt phẳng trung trực của cạnh AB (cạnh DC) và mặt phẳng trung trực của cạnh AD (cạnh BC).
- 9) Hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có 9 mặt đối xứng đó là :
 _ Ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, AD, AA'.
 _ Sáu mặt phẳng mà mỗi mặt đi qua hai cạnh đối diện : (ACC'A'), (BDD'B'), (ABC'D'), (ADC'B'), (CDA'B'), (BCD'A')
- 10) Hình bát diện đều SABCDS' có 9 mặt đối xứng đó là :
 _ Ba mặt phẳng : (ABCD), (SBS'D), (SAS'C)
 _ Sáu mặt phẳng, mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).
- 11) Xét hình hộp đứng ABCD.A₁B₁C₁D₁ có hai đáy ABCD và A₁B₁C₁D₁ là hai hình thoi (không phải hình vuông). Hình hộp đứng này có ba mặt đối xứng, đó là : $mp(AA_1C_1C), mp(BB_1D_1D)$ và mặt phẳng trung trực của các cạnh bên.
- 12) Cho phép vị tự tâm O biến điểm A thành điểm B, biết rằng $OA = 2.OB$. Khi đó, tỉ số vị tự là :
 _ Trường hợp A, B cùng phía với tâm O thì tỉ số $k = 1/2$.
 _ Trường hợp A, B khác phía với tâm O thì tỉ số $k = -1/2$.
- 13) Cho hai đường thẳng song song d, d' và một điểm O không nằm trên chúng.
 _ Nếu $O \notin mp(d, d')$ thì không có phép vị tự nào biến d thành d' .
 _ Nếu $O \in mp(d, d'), O \notin d, O \notin d'$ thì có một phép vị tự biến d thành d' .
- 14) Khối tám mặt đều có mỗi mặt là tam giác đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 cạnh nên là đa diện đều loại $\{3; 4\}$.
- 15) Khối hai mươi mặt đều có mỗi mặt là tam giác đều, mỗi đỉnh là đỉnh chung của 5 cạnh nên là đa diện đều loại $\{3; 5\}$.
- 16) Định lý Euler (Ơ-le) : Nếu ký hiệu Đ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt của một đa diện thì :
 $\text{Đ} - C + M = 2$. Vì là bát diện đều nên có 6 đỉnh và 8 mặt $\Rightarrow 6 - c + 8 = 2 \Rightarrow c = 12$.
- 17) Hình bát diện đều có 8 mặt và mỗi mặt là tam giác đều nên ta có : $2C = 3M \Rightarrow C = \frac{3.M}{2} = \frac{3.8}{2} = 12$
- 18) Hình bát diện đều có mỗi đỉnh là đỉnh chung của bốn cạnh nên ta có : $2C = 4\text{Đ} \Rightarrow \text{Đ} = \frac{2.C}{4} = \frac{2.12}{4} = 6$

19) Khối 12 mặt đều có 12 cạnh là ngũ giác đều. Vì mỗi mặt là ngũ giác đều và có M mặt nên số cạnh là 5M, nhưng mỗi cạnh lại là cạnh chung của hai mặt nên $2C = 5M \Rightarrow C = \frac{5.M}{2} = \frac{5.12}{2} = 30$

20) Số đỉnh của hình hai mươi mặt đều là : $D - C + M = 2 \Rightarrow D - 30 + 20 = 2 \Rightarrow D = 12$

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3 ; 3}	Khối tứ diện đều	4	6	4
{4 ; 3}	Khối lập phương	8	12	6
{3 ; 4}	Khối tám mặt đều	6	12	8
{5 ; 3}	Khối mười hai mặt đều	20	30	12
{3 ; 5}	Khối hai mươi mặt đều	12	30	20

21) Hình hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c có thể tích $V = abc$. Khi kích thước tăng lên k lần, tức là bằng k.a, k.b, k.c thì thể tích là $V' = ka.kb.kc = k^3(abc) = k^3V$.

22) Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó sẽ tăng lên n^3 lần vì:

• **Cách 1** : Gọi V, V', h, h', S', S theo thứ tự là thể tích, chiều cao và diện tích đáy của hai hình chóp, ta có :

$$V = \frac{1}{3} .h.S \text{ và } V' = \frac{1}{3} .h'.S' \text{ với } h' = n.h \text{ và } S' = n^2.S \Rightarrow V' = \frac{1}{3} (n.h)(n^2.S) = \frac{1}{3} n^3.h.S = n^3.V$$

Vậy thể tích của hình chóp tăng lên n^3 lần.

• **Cách 2** : Khi hình chóp đều $S_1.A_1A_2A_3...$ có chiều cao và cạnh đáy tăng lên n lần ta sẽ được một hình chóp đều $S_1.B_1B_2B_3...$ đồng dạng với hình chóp $S_1.A_1A_2A_3...$ và tỉ số đồng dạng $k = n$.

Vì tỉ số thể tích của hai khối đa diện đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng nên $\frac{V'}{V} = n^3$

Vậy thể tích của hình chóp tăng lên n^3 lần.

23) Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó sẽ giảm đi n lần vì:

Gọi V, V', h, h', S', S theo thứ tự là thể tích, chiều cao và diện tích đáy của hai hình chóp, ta có :

$$V = \frac{1}{3} .h.S \text{ và } V' = \frac{1}{3} .h'.S' \text{ với } h' = n.h \text{ và } S' = \frac{1}{n^2} .S \Rightarrow V' = \frac{1}{3} (n.h) \left(\frac{1}{n^2} .S \right) = \frac{1}{3} n.h.S = \frac{1}{n} .V.$$

Vậy thể tích của hình chóp giảm đi n lần.

24) Hình tứ diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

25) Số các đỉnh hoặc các mặt của bất kỳ hình đa diện nào cũng nhỏ nhất là 4 (đa diện có ít mặt nhất là tứ diện)

26) Số các cạnh của hình đa diện nhỏ nhất là 6 (hình tứ diện)

27) Khi lắp ghép hai khối đa diện lồi thì đoạn thẳng nối hai điểm thuộc khối đa diện mới có thể có những điểm không thuộc khối đa diện ấy. (Hình 21 SGK nâng cao trang 18)

28) Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

29) Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích chưa chắc bằng nhau vì:

khối chóp cụt có diện tích một đáy, đáy kia có diện tích khác nhau và chiều cao tương ứng bằng nhau thì thể tích khác nhau. Thể tích hình chóp cụt là : $V = \frac{1}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})h$ (với B, B' là diện tích hai đáy, h là chiều cao).

30) Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

31) Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

32) Mỗi cạnh của hình đa diện là cạnh chung của hai mặt

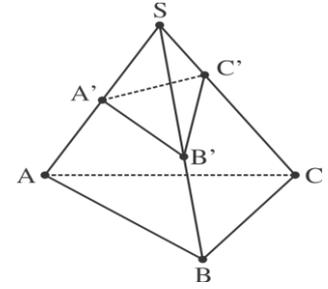
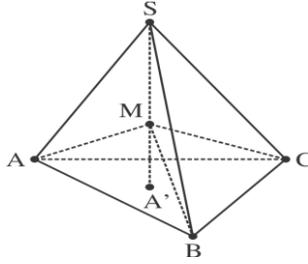
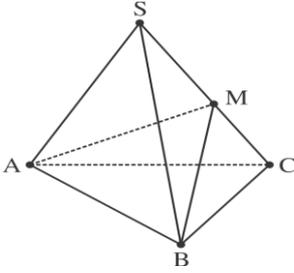
33) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến d thành d' cắt d khi và chỉ khi d cắt mp(P) nhưng không vuông góc với mp(P).

34) Trong một khối đa diện thì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

35) Trong một khối đa diện thì mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất 3 mặt.

TỈ SỐ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1) Tỉ số thể tích



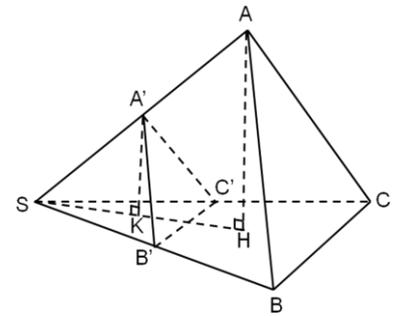
a) Nếu M nằm trên cạnh SC của hình chóp S.ABC thì $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC}$

b) Nếu M nằm trong hình chóp S.ABC và SM cắt (ABC) tại A' thì $\frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA'}$

c) Nếu A', B', C' thuộc các cạnh SA, SB, SC thì $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

• **Sử dụng kết quả sau để làm bài tập** : Cho hình chóp S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Ta có :

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



▪ **Chứng minh** :

Gọi K và H là hình chiếu vuông góc của A' và A theo thứ tự đó lên (SBC).

Do K và H đều nằm trên giao tuyến của (SBC) với mặt phẳng chứa SA và vuông góc với (SBC) nên ba điểm S, K, H thẳng hàng. Ta có A'K // AH và theo định lý Ta-lét, ta có : $\frac{A'K}{AH} = \frac{SA'}{SA}$ (1)

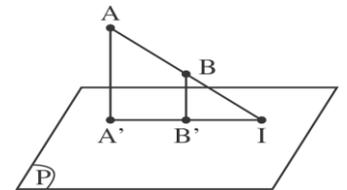
$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta S B' C'} \cdot A'K}{\frac{1}{3}S_{\Delta S B C} \cdot AH} = \frac{\frac{1}{2} \sin \widehat{BSC} \cdot SB' \cdot SC' \cdot A'K}{\frac{1}{2} \sin \widehat{BSC} \cdot SB \cdot SC \cdot AH} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \text{Vậy } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

• **Chú ý** :

Hai hình chóp có cùng diện tích đáy thì tỉ số thể tích bằng tỉ số hai đường cao tương ứng.
Hai hình chóp có cùng chiều cao thì tỉ số thể tích bằng tỉ số hai diện tích đáy tương ứng.

3) Tỉ số khoảng cách

Cho đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại I. Khi đó : $\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{AI}{BI}$

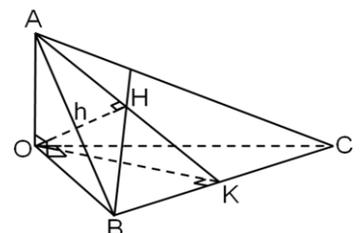


HÌNH CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Cho hình chóp OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

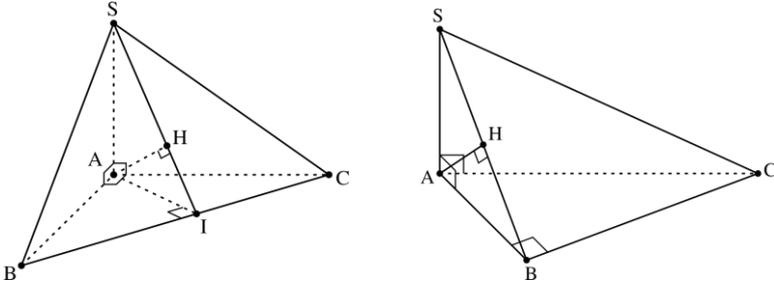
Công thức tính khoảng cách từ O đến (ABC): $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

• Độ dài OH = h ở bài toán trên chính là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC), sử dụng kết quả trên ta có thể tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau một cách tự nhiên và nhanh chóng.

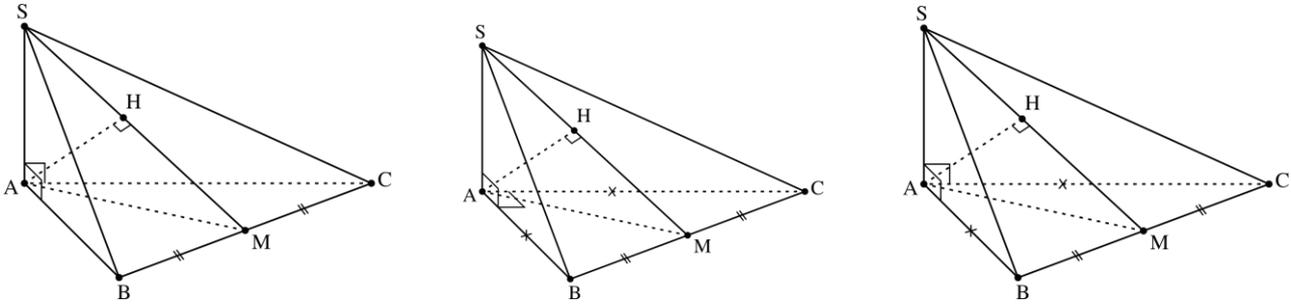


KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM A ĐẾN MẶT PHẪNG (SBC)

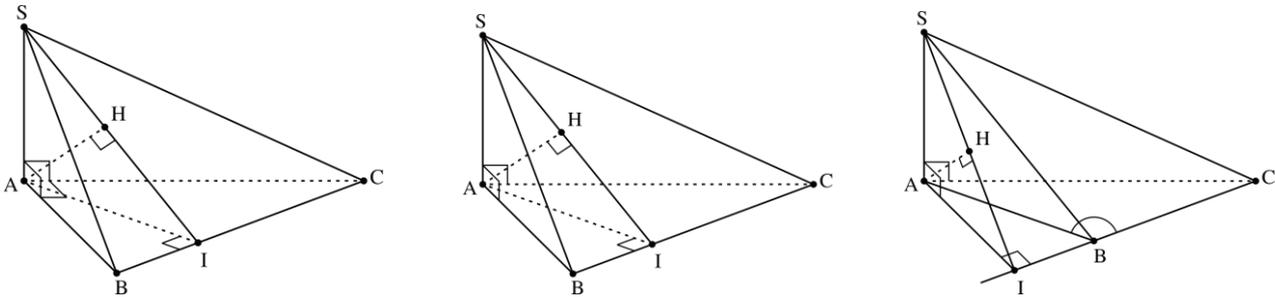
1) Tứ diện có ba cạnh vuông góc với nhau từng đôi một.



2) Đáy là tam giác đều hoặc tam giác cân hoặc tam giác vuông cân.



3) Đáy là tam giác thường hoặc tam giác vuông tại đỉnh A.



MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ 1

Hình	Công thức	Tính chất
<p>▪ Tam giác đều</p>	<ul style="list-style-type: none"> $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ 	<ul style="list-style-type: none"> Đường cao của tam giác đều bằng cạnh nhân $\sqrt{3}$ chia 2. Diện tích tam giác đều bằng bình phương cạnh nhân $\sqrt{3}$ chia 4.
<p>▪ Nửa tam giác đều</p>	<ul style="list-style-type: none"> $AC = \frac{BC}{2}$ $AB = AC\sqrt{3}$ $AC = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$ 	<ul style="list-style-type: none"> Cạnh góc vuông nhỏ bằng nửa cạnh huyền. Cạnh góc vuông lớn bằng cạnh góc vuông nhỏ nhân $\sqrt{3}$. Cạnh góc vuông nhỏ bằng cạnh góc vuông lớn nhân $\sqrt{3}$ chia 3.
<p>▪ Tam giác vuông cân</p>	<ul style="list-style-type: none"> $BC = AB\sqrt{2} = AC\sqrt{2}$ $AB = AC = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> Cạnh huyền bằng cạnh góc vuông nhân $\sqrt{2}$. Cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân $\sqrt{2}$ chia 2.

MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ 2

	<p>▪ TỨ DIỆN ĐỀU CẠNH a</p> <ul style="list-style-type: none"> • Đường cao của tam giác đều ABC: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ • Diện tích tam giác đều ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ • Độ dài đường cao: $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ • Thể tích khối tứ diện đều: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ • Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ • Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC: $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ • Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\widehat{SAM} = \arctan \sqrt{2}$. • Góc giữa mặt bên và mặt đáy: $\widehat{SMA} = \arctan 2\sqrt{2}$. • Khoảng cách giữa hai cạnh đối diện: $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ • Tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp là trọng tâm G của tứ diện. • Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều: $R = \frac{3}{4}SH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ • Diện tích toàn phần: $S_{tp} = a^2\sqrt{3}$
	<p>1) Tứ diện đều cạnh a.</p> $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \rightarrow V_{S.ABC} = \frac{(\text{cạnh})^3\sqrt{2}}{12}$
	<p>2) Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.</p> $V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12} \rightarrow V_{S.ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2\sqrt{3b^2 - (\text{cạnh})^2}}{12}$
	<p>3) Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a; góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng α.</p> $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{12} \rightarrow V_{S.ABC} = \frac{(\text{cạnh})^3 \cdot \tan \alpha}{12}$
	<p>4) Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a; góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng β.</p> $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \cdot \tan \beta}{24} \rightarrow V_{S.ABC} = \frac{(\text{cạnh})^3 \cdot \tan \beta}{24}$
	<p>5) Hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng b; góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng α.</p> $V_{S.ABC} = \frac{b^3\sqrt{3}}{4} \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

	<p>6) Hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a</p> $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{(\text{cạnh})^3 \sqrt{2}}{6}$
	<p>7) Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b</p> $V_{S.ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6} \rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{(\text{cạnh})^2 \sqrt{4b^2 - 2(\text{cạnh})^2}}{6}$
	<p>8) Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a; góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng alpha</p> $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2} \cdot \tan \alpha}{6} \rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{(\text{cạnh})^3 \sqrt{2} \cdot \tan \alpha}{6}$
	<p>9) Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a; góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng alpha</p> $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \cdot \tan \alpha}{6} \rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{(\text{cạnh})^3 \cdot \tan \alpha}{6}$
	<p>10) Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a; góc giữa đường cao và mặt bên bằng alpha</p> $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{6} \cot \alpha \rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{(\text{cạnh})^3 \cdot \cot \alpha}{6}$
	<p>11) Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a; góc ở đỉnh của mặt bên bằng alpha</p> $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{6} \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1} \rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{(\text{cạnh})^3}{6} \sqrt{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$
	<p>12) Hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b; góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng alpha</p> $V_{S.ABCD} = \frac{4a^3 \cdot \tan \alpha}{3\sqrt{(2 + \tan^2 \alpha)^3}}$
	<p>13) Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a; góc ở đáy của mặt bên bằng alpha</p> $V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}}{6}$