

**BÀI 1 :** Trong mặt phẳng Oxy, Cho A(3 ; 1), B(3 ; -1) và đường tròn (C):  $x^2 + y^2 = 1$ .

Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho  $\widehat{MA, MB}$  lớn nhất.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Ta có: } \cos(\widehat{MA, MB}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}|}{AM \cdot BM}$$

Theo giả thiết, ta có:  $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$  ( $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ )

Vì  $M \in (C)$  nên  $M(x; \sqrt{1 - x^2}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x - 3; \sqrt{1 - x^2} - 1)$  và  $\overrightarrow{BM} = (x - 3; \sqrt{1 - x^2} + 1)$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - 1)(\sqrt{1 - x^2} + 1) = x^2 - 6x + 9 + 1 - x^2 - 1 = -6x + 9$$

$$\cos(\widehat{MA, MB}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}|}{AM \cdot BM} = \frac{|-6x + 9|}{AM \cdot BM} = \frac{-6x + 9}{AM \cdot BM} \quad (\text{Do } -1 \leq x \leq 1)$$

Mặt khác, ta có:  $AM \cdot BM \leq \frac{AM^2 + BM^2}{2}$

$$\bullet \overrightarrow{AM} = (x - 3; \sqrt{1 - x^2} - 1) \Rightarrow AM = \sqrt{(x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - 1)^2}$$

$$\Rightarrow AM^2 = (x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - 1)^2 = x^2 - 6x + 9 + 1 - x^2 + 1 - 2\sqrt{1 - x^2} = -6x + 11 - 2\sqrt{1 - x^2}$$

$$\bullet \overrightarrow{BM} = (x - 3; \sqrt{1 - x^2} + 1) \Rightarrow BM = \sqrt{(x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} + 1)^2}$$

$$\Rightarrow BM^2 = (x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} + 1)^2 = x^2 - 6x + 9 + 1 - x^2 + 1 + 2\sqrt{1 - x^2} = -6x + 11 + 2\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow AM^2 + BM^2 = -6x + 11 - 2\sqrt{1 - x^2} - 6x + 11 + 2\sqrt{1 - x^2} = -12x + 22$$

$$\Rightarrow \frac{AM^2 + BM^2}{2} = -6x + 11$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{MA, MB}) &= \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}|}{AM \cdot BM} \geq \frac{-6x + 9}{\frac{AM^2 + BM^2}{2}} = \frac{-6x + 9}{-6x + 11} = \frac{(-6x + 11) - 2}{-6x + 11} \\ &= 1 - \frac{2}{-6x + 11} \geq 1 - \frac{2}{-6.1 + 11} = \frac{3}{5} \quad (\text{do } x \leq 1) \end{aligned}$$

$$\text{Đáu "=" xảy ra } \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - 1)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - 1)^2 = (x - 3)^2 + (\sqrt{1 - x^2} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 + 1 - 2\sqrt{1 - x^2} = 1 - x^2 + 1 + 2\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow 4\sqrt{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow M(1; 0) \text{ hoặc } M(-1; 0)$$

**BÀI 2 :** Trong mặt phẳng Oxy cho (E) có phương trình:  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

a) Tính độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự và tâm sai của (E).

b) Gọi  $F_1, F_2$  là các tiêu điểm (E). Tìm điểm M thuộc (E) sao cho  $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$

▪ Hướng dẫn :

a) Tính độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự và tâm sai của (E).

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

Độ dài trục lớn A<sub>1</sub>A<sub>2</sub> : 2a = 10

Độ dài trục nhỏ B<sub>1</sub>B<sub>2</sub> : 2b = 4

Tiêu cự : 2c = 8

$$\text{Tâm sai : } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

b) Gọi F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub> là các tiêu điểm (E). Tìm điểm M thuộc (E) sao cho  $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$

$$\text{Gọi } M(x; y) \in (E), \text{ ta có : } MF_1 = a + \frac{c}{a}x = 5 + \frac{4}{5}x \text{ và } MF_2 = a - \frac{c}{a}x = 5 - \frac{4}{5}x$$

Áp dụng định lý hàm cosin, ta có :  $(F_1F_2)^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2 \cdot MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow (2c)^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 + \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 - 2 \cdot \left(a + \frac{c}{a}x\right) \cdot \left(a - \frac{c}{a}x\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8^2 = \left(5 + \frac{4}{5}x\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}x\right)^2 - \left[(5)^2 - \left(\frac{4}{5}x\right)^2\right] \Leftrightarrow 64 = 25 + \frac{16}{25}x^2 + 25 + \frac{16}{25}x^2 - 25 + \frac{16}{25}x^2$$

$$\Leftrightarrow 64 = 25 + \frac{48}{25}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{39.25}{48} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\sqrt{13}}{4}.$$

$$\text{Thay vào (E), ta có: } 9\left(\frac{39.25}{48}\right) + 25y^2 = 225 \Rightarrow 25y^2 = 225 - \frac{2925}{16} = \frac{675}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{675}{16.25} \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy có 4 điểm M là: } M_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_2\left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_3\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_4\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$