

▪ **Dạng 3 : Dạng vô địnhh  $\frac{0}{0}$  của một hàm số lượng giác.**

**BÀI 11 :** Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng hàm số lượng giác)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \sin x}{(1 - \cos x) - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sin^2 x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{2\sin^2 x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{2\sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x + 1)(2\sin x - 1)}{(\sin x - 1)(2\sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x (\cos x + \sin x) = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1 - |1 + \sin 3x|}{\sqrt{1 - \cos x}} \right|. \text{ Ta có : } \left| \frac{1 - |1 + \sin 3x|}{\sqrt{1 - \cos x}} \right| = \left| \frac{1 - 1 - \sin 3x}{\sqrt{1 - \cos x}} \right| = \frac{|\sin 3x|}{\sqrt{1 - \cos x}} = \frac{|3\sin x - 4\sin^3 x|}{\sqrt{1 - \cos x}} = \frac{|\sin x(3 - 4\sin^2 x)|}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \frac{|(3 - 4\sin^2 x)|\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} = |(3 - 4\sin^2 x)|\sqrt{1 + \cos x}$$

$$\text{Do đó : } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1 - |1 + \sin 3x|}{\sqrt{1 - \cos x}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} (|3 - 4\sin 2x| \sqrt{1 + \cos x}) = 3\sqrt{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + \sin 2x + 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 2x) + \sin 2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2(\cos x + \sin x) = 2(0+1) = 2$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos x} - \tan x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$$

### C. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.

1) **Phương pháp dùng định lý hàm số kẹp giữa hai hàm số.**

Đôi khi ta phải sử dụng định lý kẹp để tìm giới hạn các hàm số.

**Định lý :** (Định lý kẹp về giới hạn của hàm số)

Cho khoảng K chứa điểm  $x_0$  và ba hàm số  $f(x)$ ,  $u(x)$  và  $v(x)$ . Nếu  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  với mọi  $x \in K \setminus \{x_0\}$  và nếu :  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = L$  thì  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

**BÀI 17 :** Tìm các giới hạn sau : (Giới hạn dạng của hàm số lượng giác)

$$1) \text{ Tìm } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$$

Với mọi  $x \neq 0$ , ta có :  $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$

Mặt khác :  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  nên  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$

$$2) \text{ Tìm } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x + 2\cos x}{x^2 + x + 1}$$

ta có :  $x^2 + x + 1 > 0$ ,  $|\sin 2x| \leq 1$ ,  $|\cos x| \leq 1$ , do đó :  $\frac{-3}{x^2 + x + 1} \leq \frac{\sin 2x + 2\cos x}{x^2 + x + 1} \leq \frac{3}{x^2 + x + 1}$

Vì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2 + x + 1} = 0$  nên  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x + 2\cos x}{x^2 + x + 1} = 0$

2) **Phương pháp dùng định lý** :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Hệ quả** :  $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1}$  (nếu  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ ) ;  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$  ;  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1}$

**BÀI 18** : Tìm các giới hạn sau :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{25}} = \frac{25}{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{x+1} + 1)}{x+1-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2(\sqrt{x+1} + 1) = 4$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin(\pi - 3x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{\sin(\pi - 3x)}{\pi - 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{\pi - 3x}{\pi - 3x}} = \frac{-2}{3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$