

CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

1. PHẦN LÝ THUYẾT

A. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Cũng tương tự như giải phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta cũng theo cách chung là khử dấu giá trị tuyệt đối đưa về các bất phương trình không còn dấu giá trị tuyệt đối.

1) Dạng cơ bản :

- a) $|A| \leq B \Leftrightarrow -B \leq A \leq B$ hay $|A| \leq B \Leftrightarrow A^2 \leq B^2 \Leftrightarrow (A+B)(A-B) \leq 0$
- b) $|A| \geq B \Leftrightarrow A > B$ hay $A < -B$
- c) $|A| \leq |B| \Leftrightarrow A^2 \leq B^2 \Leftrightarrow (A+B)(A-B) \leq 0$

2) Dạng bất phương trình chứa nhiều GTTĐ :

- _ Ta lập bảng xét dấu các biểu thức chứa trong GTTĐ.
- _ Chia trường hợp để loại bỏ dấu GTTĐ.

B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

1) Dạng cơ bản :

• Công thức :

- a) Nếu $A, B > 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$.

$$b) \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$c) \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$$

2) Dạng đặt ẩn phụ :

Đặt ẩn phụ là các căn thức ta có thể biến đổi phương trình đã cho thành phương trình không chứa căn. Việc chọn ẩn phụ rất đa dạng, cần linh hoạt để có cách giải tốt nhất.

Khi đặt ẩn phụ cần chú ý các điều kiện sau :

- Nếu đặt $t = \varphi(x)$, $x \in D$ thì điều kiện để tính được x theo t là $t \in \varphi(D)$.
- Nếu $x \in [a ; b]$ và đặt $x = \varphi(t)$ thì phải chọn $t \in [\alpha ; \beta]$ sao cho khi t biến thiên từ α đến β thì x biến thiên từ a đến b .
- Có thể đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình ẩn t và ẩn x .
- Có thể đặt hai ẩn phụ u, v để đưa về hệ hai ẩn u, v .

3) Dạng biến đổi về phương trình tích

Nếu có nhân tử chung, ta có thể đưa phương trình về phương trình tích $A.B = 0$, trong đó các phương trình $A = 0, B = 0$ đơn giản hơn.

Chú ý các lượng liên hợp giúp làm xuất hiện các nhân tử chung.

4) Dạng sử dụng các điều kiện xảy ra dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức quen thuộc

Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để đánh giá hai vế của phương trình và sử dụng điều kiện xảy ra dấu “=”, ta có thể giải được một số phương trình chứa căn.

5) Dạng dự đoán và chứng minh phương trình có duy nhất nghiệm

Dựa vào điều kiện để bất phương trình có nghiệm ta sẽ xác định nghiệm nằm trong các khoảng xác định để từ đó tìm nghiệm của bất phương trình.

-----❖❖-----

2. CÁC VÍ ĐU

Ví dụ 1 : Giải bất phương trình sau : $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$ (ĐH 2004)

Áp dụng các công thức cơ bản : $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \vee \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$

$$\text{Ta có : } \frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-3 > 0 \\ x^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \geq 4 \vee x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 10 - 2x < 0 \\ 2(x^2 - 16) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x > 5 \\ x \geq 4 \vee x \leq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34} \end{cases} \text{ hay } (x > 5)$$

$$\Leftrightarrow (10 - \sqrt{34} < x \leq 5) \text{ hay } (x > 5)$$

$$\Leftrightarrow x > 10 - \sqrt{34} \quad (\approx 4,17)$$

So với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là: $x > 10 - \sqrt{34}$

▪ Cách khác : Điều kiện: $x \geq 4$

$$\text{Ta có : } \frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 10 - 2x < 0 \\ 2(x^2 - 16) \geq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x > 5 \\ x \geq 4 \vee x \leq -4 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34} \end{cases} \text{ hay } (x > 5) \Leftrightarrow (10 - \sqrt{34} < x \leq 5) \text{ hay } (x > 5) \Leftrightarrow x > 10 - \sqrt{34}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x > 10 - \sqrt{34}$

▪ Chú ý : Cách giải trên ta đã gắn luôn điều kiện ban đầu của bài toán vào trong công thức giải bất phương trình $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$ nên khi kết luận không cần so sánh với điều kiện ban đầu nữa.

Ví dụ 2 : Giải bất phương trình sau : $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \leq 0$

(DBĐH 2005)

Ta có : $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{8x^2 - 6x + 1} \leq 4x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ 4x - 1 \geq 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \leq (4x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1}{4} \\ 4x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm của BPT là : $x = \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2}$

Ví dụ 3 : Giải bất phương trình sau : $\sqrt{x+12} \geq \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1}$

(DBĐH 2002)

▪ Nhân dạng : Khi bình phương hai vế thì căn thức bị triệt tiêu.

▪ Cách giải : Đặt điều kiện và bình phương cho mất căn bậc hai.

Ta có : $\sqrt{x+12} \geq \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1}$

Điều kiện : $x \geq 3$.

$$\sqrt{x+12} \geq \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x+12 \geq x-3 + 2x+1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x - 3} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x - 3} \leq 7-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 \leq (7-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 7 \\ x^2 + 9x - 52 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 7 \\ -13 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $3 \leq x \leq 4$

Ví dụ 4 : Giải bất phương trình sau : $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \geq x^2 + 7x + 12$ (ĐH D 2014)

▪ Phương pháp vận dụng lượng liên hiệp.

Nhân hai vế của một bất phương trình với một biểu thức liên hợp mà xuất hiện một nhân tử chung của bất phương trình và sau khi đặt nhân tử chung ta chuyển về giải bất phương trình đơn giản hơn.

▪ Chú ý : Khi nhân với một biểu thức luôn khác 0 thì ta nhân tự nhiên mà không xét thêm điều kiện gì.

Điều kiện : $x \geq -2$. Với điều kiện trên, bất phương trình (1) tương đương với :

$$(x+1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x+6)(\sqrt{x+7} - 3) - (x^2 + 2x - 8) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6)\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} - (x-2)(x+4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4) \right] \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Do } x \geq -2 \text{ nên } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+6 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{x+6}{2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0$$

Do đó bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

So sánh với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-2 \leq x \leq 2$.

Ví dụ 5 : Giải bất phương trình sau : $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x$

(DBĐH 2004)

▪ Phương pháp đặt ẩn phụ.

Có nhiều bất phương trình chứa căn mà khi ta bình phương lên sẽ được một bất phương trình phức tạp khó giải. Khi đó, nếu ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ thì có thể chuyển bất phương trình đã cho về một bất phương trình đơn giản và dễ giải hơn.

Ta dùng ẩn số phụ để thay thế một biểu thức chứa ẩn nào đó nhằm mục đích hạ bậc của bất phương trình hoặc đưa bất phương trình đã cho về những bất phương trình có dạng đã biết. Giải bất phương trình với ẩn phụ, sau đó tìm nghiệm của bất phương trình.

Ta có : $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x - x^2$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2x^2 + 4x + 3 \Rightarrow -x^2 - 2x + 6 = \frac{1}{2}(15 - t^2)$$

$$\text{Ta được : } t \geq \frac{1}{2}(15 - t^2) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 3 \\ t \leq -5 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 3 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \leq -3 \vee x \geq 1$

3. **BÀI TẬP** : Giải các bất phương trình sau :

$$1) \frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}} \quad (\text{ĐH A 2004}) \quad \underline{\text{DS}} : x > 10 - \sqrt{34}$$

$$2) \sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \leq 0 \quad (\text{DBĐH 2005}) \quad \underline{\text{DS}} : x = 1/4 \vee x \geq 1/2$$

$$3) \sqrt{x+12} \geq \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} \quad (\text{DBĐH 2002}) \quad \underline{\text{DS}} : 3 \leq x \leq 4$$

$$4) \sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4} \quad (\text{ĐH A 2005}) \quad \underline{\text{DS}} : 2 \leq x < 10$$

$$5) \sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2} \quad (\text{DBĐH 2005}) \quad \underline{\text{DS}} : 2/3 \leq x \leq 1 \vee 14/3 \leq x \leq 5$$

$$6) (x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \geq x^2 + 7x + 12 \quad (\text{ĐH D 2014}) \quad \underline{\text{DS}} : -2 \leq x \leq 2$$

$$7) \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1 \quad (\text{ĐH A 2010}) \quad \underline{\text{DS}} : x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$8) \frac{1}{1-x^2} + 1 > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{DBĐH 2008}) \quad \underline{\text{DS}} : -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{2\sqrt{5}}{5} < x < 1$$

$$9) x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x} \quad (\text{ĐH B 2012}) \quad \underline{\text{DS}} : 0 \leq x \leq 1/4 \vee x \geq 4$$

$$10) x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x \quad (\text{DBĐH 2004}) \quad \underline{\text{DS}} : x \leq -3 \vee x \geq 1$$

$$11) (x+1)(x-3)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < 2 - (x-1)^2 \quad (\text{DBĐH 2008}) \quad \underline{\text{DS}} : 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$$

$$12) (x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0 \quad (\text{ĐH D 2002}) \quad \underline{\text{DS}} : x \leq -1/2 \vee x = 2 \vee x \geq 3$$

-----♦♦♦-----

Các em giải trước.

Nhin thì có vẻ khó nhưng cứ áp dụng công thức và những gì đã học thì sẽ giải được ngay.

Bài giải sẽ có trong 2 tuần sau. Chúc các em thành công.