

CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

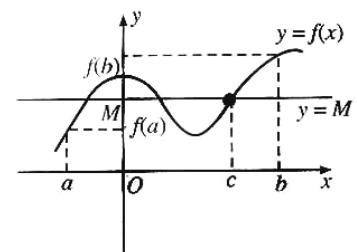
1. TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

- **Dịnh lý :** (Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = M$.

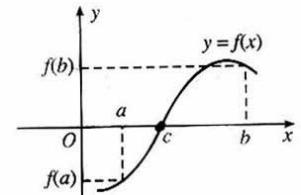
- **Ý nghĩa hình học của định lý :**

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a ; b)$.



- **Hệ quả 1 :** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

- **Hệ quả 2 :** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a ; b)$.



- **Ý nghĩa hình học của hệ quả :**

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a ; b)$.

2. PHƯƠNG PHÁP

Chứng minh phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm là một ứng dụng rất quan trọng của hàm số liên tục trên đoạn.

- **Cần nhớ :** Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a ; b)$, ta thực hiện các bước sau :

- Chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b) < 0$.

- **Phương pháp chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm**

- 1) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm, ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : biến đổi phương trình thành dạng $f(x) = 0$.

Bước 2 : Tìm hai số a, b sao cho $f(a).f(b) < 0$.

Bước 3 : Chứng minh hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$.

Bước 4 : Kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a ; b)$.

- 2) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất n nghiệm, ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : biến đổi phương trình thành dạng $f(x) = 0$.

Bước 2 : Tìm n cặp số a_i, b_i sao cho các khoảng $(a_i ; b_i)$ rời nhau và $f(a_i).f(b_i) < 0$, với $i = 1, 2, \dots, n$

Bước 3 : Chứng minh hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$.

Bước 4 : Kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_i \in (a_i ; b_i)$.

- **Chú ý 1 :**

Khi phương trình $f(x) = 0$ có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :

- $f(a), f(b)$ không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi (hoặc chỉ dương hoặc chỉ âm)
- Hoặc $f(a), f(b)$ chứa tham số nhưng tích $f(a).f(b)$ luôn âm.

- **Chú ý 2 :**

- Nếu $f(a).f(b) \leq 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $[a ; b]$.

- Để tìm được $f(a)$ và $f(b)$ thỏa $f(a).f(b) \leq 0$, chúng ta có thể dùng các kết quả sau :

+ Trong bốn số thỏa $f(a)f(b)f(c)f(d) \leq 0$ luôn có hai số có tích ≤ 0 .

+ Trong ba số thỏa $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ luôn có hai số có tích ≤ 0 .

- Có thể thay $f(a)$ hay $f(b)$ bởi giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khi đó, ta có :

+ Nếu f liên tục trên $[a ; +\infty)$ và có $f(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(a ; +\infty)$.

+ Nếu f liên tục trên $(-\infty ; a]$ và $f(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-\infty ; a)$.

3. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng phương trình $2x^5 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Đặt } f(x) = 2x^5 + 3x + 2$$

Ta có $f(x)$ là một hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Mặt khác:

$$f(-1) = -3 < 0.$$

$$f(0) = 2 > 0.$$

$$\Rightarrow f(-1)f(0) < 0$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (-1 ; 0) \text{ sao cho } f(x_0) = 0.$$

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1 ; 0)$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng phương trình $(x-199)^4 \cdot (x-200)^3 + 2x - 399 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Đặt } f(x) = (x-199)^4 \cdot (x-200)^3 + 2x - 399.$$

Hàm số f là hàm đa thức xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số f liên tục trên $[199, 200]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & \begin{cases} f(199) = (199-199)^4 \cdot (199-200)^3 + 2 \cdot 199 - 399 = -1 \\ f(200) = (200-199)^4 \cdot (200-200)^3 + 2 \cdot 200 - 399 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(199) \cdot f(200) = (-1) \cdot 1 = -1 < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (199; 200)$$

Vậy phương trình $(x-199)^4 \cdot (x-200)^3 + 2x - 399 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng phương trình : $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng $(-2 ; 2)$.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Hàm số } f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \text{ liên tục trên đoạn } [-2; 2]$$

Ta có :

$$f(-2) = -3 < 0 ; f(0) = 1 > 0 ; f(1) = -3 < 0 ; f(2) = 5 > 0$$

$$\Rightarrow f(-2) \cdot f(0) < 0 \text{ nên phương trình có nghiệm } (-2; 0)$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \text{ nên phương trình có nghiệm } (0; 1)$$

$$\Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \text{ nên phương trình có nghiệm } (1; 2)$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm trên khoảng $(-2 ; 2)$.

Ví dụ 4 : Chứng minh : phương trình $x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Đặt } f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 7$$

Ta có : hàm số f là hàm đa thức xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} (1)

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & \begin{cases} f\left(\frac{21}{10}\right) = \left(\frac{21}{10}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{21}{10}\right)^2 + 3 \cdot \frac{21}{10} - 7 = -0,259 \\ f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 7 = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{21}{10}\right) \cdot f(3) = -0,259 \cdot 11 = -2,849 < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(\frac{21}{10}; 3\right)$.

Vậy phương trình : $x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2.

Ví dụ 5 : Chứng minh rằng phương trình $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0 ; \pi)$.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$$

Hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$\Rightarrow \text{hàm số } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [0 ; \pi]. \quad (1)$$

Mặt khác :

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(\pi) = \pi^2 \cos \pi + \pi \sin \pi + 1 = 1 - \pi^2 < 0$$

$$\Rightarrow f(0).f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc $(0 ; \pi)$.

Ví dụ 6 : Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2020x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.

▪ **Hướng dẫn :**

Hàm số $f(x) = x^3 + 2020x^2 + 0,1$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có:

$$f(0) = 0,1 > 0.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại một số thực a sao cho $f(a) < 0$.

Vì $f(0).f(a) < 0$ nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (a ; 0)$ sao cho $f(c) = 0$.

$\Rightarrow x = c$ là một nghiệm âm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm âm.

▪ **Cách khác :**

Hàm số $f(x) = x^3 + 2018x^2 + 0,1$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có:

$$f(0) = 0,1 > 0.$$

$$f(-2222) = -997331367,9 < 0$$

$\Rightarrow f(0).f(-2222) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2222 ; 0)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm âm.

Ví dụ 7 : Chứng minh rằng phương trình : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{2b}{3} - \frac{2}{3} = 0$ luôn có nghiệm.

▪ **Hướng dẫn :**

Xét hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{2b}{3} - \frac{2}{3}$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(-1) = -a + \frac{b}{3} - c + \frac{1}{3}$$

$$f(0) = -\frac{2b}{3} - \frac{2}{3}$$

$$f(1) = a + \frac{b}{3} + c + \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow f(-1) + f(0) + f(1) = 0 \Rightarrow$ trong ba số $f(0), f(1), f(-1)$ phải có hai số có tích ≤ 0

\Rightarrow phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng phương trình $m(x - 1)(x + 2) + 2x + 1 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ **Hướng dẫn :**

Đặt $f(x) = m(x - 1)(x + 2) + 2x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Mặt khác :

$$f(1) = 3$$

$$f(-2) = -3$$

$$\Rightarrow f(1).f(-2) = 3.(-3) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2 ; 1)$.

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 9 : Cho phương trình $(m + 1)(x^2 + m)x^2 - (4x - 3)(m^2 + 4m + 3) = 0$ (1) với m là tham số. Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình (1) luôn có nghiệm x.

▪ **Hướng dẫn**

Xét hàm số $f(x) = (m + 1)(x^2 + m)x^2 - (4x - 3)(m^2 + 4m + 3)$, ta có:

$$+ f(1) = -2(m + 1) \text{ và } f(3) = 54(m + 1)$$

$$\Rightarrow f(1).f(3) = -108(m+1)^2 \leq 0 \quad (a)$$

+ f là hàm số liên tục trên đoạn $[1; 3]$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [1; 3], \forall m \in \mathbb{R}$

Do đó phương trình (1) luôn có nghiệm x.

Ví dụ 10 : Chứng minh rằng $\forall m$ phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm.

▪ Hướng dẫn :

Điều kiện : $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m \Leftrightarrow \sin x - \cos x - m \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m \cdot \sin x \cdot \cos x$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có :

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \text{ luôn có một nghiệm thuộc } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy phương trình luôn có một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 11 : Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = (1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$

Hàm số f(x) xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có :

$$f(-1) = -1 < 0$$

$$f(-2) = m^2 + 2 > 0, \forall m \Rightarrow f(-1).f(-2) < 0 \text{ nên phương trình có nghiệm } (-2; -1)$$

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 12 : Chứng minh phương trình: $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ Hướng dẫn :

Xét hàm số $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có :

$$f(-3) = -44m^2 - 14 < 0, \forall m$$

$$f(0) = m^2 + 1 > 0, \forall m$$

$$f(1) = -2 < 0, \forall m$$

$$f(2) = m^2 + 1 > 0, \forall m$$

Do đó, ta có : $f(-3).f(0) < 0 ; f(0).f(1) < 0$ và $f(1).f(2) < 0$ với mọi m.

f liên tục trên các đoạn $[-3; 0], [0; 1]$ và $[1; 2]$.

Do đó tồn tại $x_1 ; x_2 ; x_3$ sao cho $-3 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Suy ra phương trình đã cho có ba nghiệm là : $x_1 ; x_2 ; x_3$.

Ví dụ 13 : Chứng minh phương trình: $(\sqrt{x-1})^3 + mx = m + 1$ luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $t = \sqrt{x-1}$, điều kiện: $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng: $f(t) = t^3 + mt^2 - t = 0$ là hàm đa thức nên liên tục trên \mathbb{R} .

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $f(0) = -1 < 0$

Mặt khác: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$

Suy ra: $f(0).f(c) < 0$. Vậy phương trình $f(t) = 0$ luôn có nghiệm $t_0 \in (0; c)$, khi đó: $\sqrt{x-1} = t_0 \Leftrightarrow t_0^2 + 1 > 1$

Vậy với mọi m thì phương trình luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Ví dụ 14 : Chứng minh rằng phương trình $mx^4 + 2x^2 - x - m = 0$ luôn luôn có 2 nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

▪ **Hướng dẫn :**

• Xét $m = 0$. Phương trình trở thành : $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$: phương trình có 2 nghiệm.

• Xét $m \neq 0$. Phương trình trở thành : $x^4 + \frac{2}{m}x^2 - \frac{1}{m}x - 1 = 0$

$$\text{Đặt } f(x) = x^4 + \frac{2}{m}x^2 - \frac{1}{m}x - 1$$

Hàm số f(x) xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ nên tồn tại một số âm } a \text{ sao cho } f(a) > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ nên tồn tại một số dương } b \text{ sao cho } f(b) > 0.$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$\Rightarrow f(a).f(0) < 0 \text{ và } f(0).f(b) < 0$$

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có 2 nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 15 : Chứng minh phương trình $\frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1} + mx = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi $m \in \mathbb{R}$.

▪ **Hướng dẫn**

Xét hàm số $\frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1} + mx = 0$ có tập xác định là \mathbb{R} (vì $x^2 + x + 1 > 0, \forall x$)

Hàm số f(x) xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1} + mx \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1 - \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{m}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \text{tồn tại một số } a \text{ sao cho } f(a) > 0.$$

$$\Rightarrow f(0).f(a) < 0$$

$$\Rightarrow \text{phương trình có ít nhất một nghiệm } x_0 \in (0; a) \Rightarrow x_0 > 0.$$

Vậy phương trình luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 16 : Chứng minh phương trình : $\cos^4 x + \cos^3 x - 2c \cdot \cos x = 2 \sin^3 x$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c.

▪ **Hướng dẫn :**

Xét hàm số $f(x) = \cos^4 x + \cos^3 x - 2c \cdot \cos x - 2 \sin^3 x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, ta có :

$$\bullet f \text{ liên tục trên } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\bullet f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2a) \cdot (-2a) = -4a^2 \leq 0$$

Vậy phương trình f(x) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, do đó (1) có nghiệm với mọi a, b, c.

Ví dụ 17 : Chứng minh phương trình $\frac{x^{2017}}{a} + \frac{x^{2018}}{b} + \frac{1}{c} = 0$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thỏa $a, b, c \neq 0$ và $bc + ac + 2ab = 0$ có

ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

▪ **Hướng dẫn**

Đặt $f(x) = \frac{x^{2017}}{a} + \frac{x^{2018}}{b} + \frac{1}{c}$ có tập xác định là \mathbb{R} (vì a, b, c $\neq 0$).

Hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

$$f(0) = \frac{1}{c}$$

$$f(1) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow f(0) + f(1) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = \frac{bc + ac + 2ab}{abc} = \frac{0}{abc} = 0$$

Do $c \neq 0$ nên $f(0) \neq 0$ nên $f(0)$ và $f(1)$ là hai số trái dấu nhau.

$\Rightarrow \exists x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Vậy phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Ví dụ 18 : Cho hàm số $f(x) = ax^4 + (b+1)x^3 + x^2 - 2x + c$.

a) Tính $f(-2) + 3f(0) + 4f(1)$ theo a, b, c .

b) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thực với mọi số thực a, b, c thỏa $5a - b + 2c = 0$ và $c \neq 0$

▪ Hướng dẫn :

a) Tính $f(-2) + 3f(0) + 4f(1)$ theo a, b, c .

$$f(-2) = 16a - 8b + c$$

$$f(0) = c$$

$$f(1) = a + b + c$$

$$f(-2) + 3f(0) + 4f(1) = 16a - 8b + c + 3c + 4(a + b + c) = 20a - 4b + 8c$$

b) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thực với mọi số thực a, b, c thỏa $5a - b + 2c = 0$ và $c \neq 0$.

Ta có: $f(-2) + 3f(0) + 4f(1) = 4(5a - b + 2c) = 0$ và $f(0) = c \neq 0$

Nên: có hai trong ba giá trị $f(-2), 3f(0)$ và $4f(1)$ trái dấu

$\Rightarrow f(-2).f(0) < 0$ hoặc $f(-2).f(1) < 0$ hoặc $f(0).f(1) < 0$

Mà hàm số $f(x)$ là hàm số xác định, liên tục trên \mathbb{R}

Nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm

Ví dụ 19 : Chứng minh rằng phương trình : $a.\sin 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm.

▪ Hướng dẫn :

Đặt $f(x) = a.\sin 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x$

Hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} nên liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có : $f(0) = b + c$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a - b + 1$; $f(\pi) = b - c$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a - b - 1$

nên $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \forall a, b, c$

Do đó tồn tại 2 giá trị $p, q \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$ thỏa $f(p).(q) \leq 0$.

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 20 : Chứng minh rằng phương trình : $ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a) = 0$ luôn có nghiệm.

▪ Hướng dẫn :

Xét $f(x) = ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a)$ liên tục trên \mathbb{R} , ta có :

$$f(a) = bc(a - b)(a - c)$$

$$f(b) = ca(b - c)(b - a)$$

$$f(c) = ab(c - a)(c - b)$$

$$\Rightarrow f(0).f(a).f(b).f(c) = -a^2b^2c^2(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = M$$

• Nếu $M = 0$ thì phương trình có nghiệm là $0, a, b$, hay b, c .

• Nếu $M < 0$ thì trong 4 số $f(0), f(a), f(b)$ và $f(c)$ phải có hai số trái dấu nhau.

Vậy phương trình luôn có nghiệm.

4. BÀI TẬP

BÀI 1 : Chứng minh rằng phương trình :

- 1) $2x^5 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm.
- 2) $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$ có nghiệm.
- 3) $x^5 + 2x^4 - 3x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm.
- 4) $(x-199)^4 \cdot (x-200)^3 + 2x - 399 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.
- 5) $4x^4 + 2x^2 + x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc $(-1; 1)$.
- 6) $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1; 2)$.
- 7) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng $(-2; 2)$.
- 8) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ vô nghiệm trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$ (tức là vô nghiệm khi $|x| > 2$).
- 9) $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm trong khoảng $(-2; 5)$.
- 10) $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có nghiệm dương.
- 11) $x^5 - 5x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.
- 12) $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 13) $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .
- 14) $x^3 - 2x^2 + 3x = 7$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2 .
- 15) $100x^3 - 10x - 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm âm.
- 16) $x^5 - \sqrt{26}x^2 + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.
- 17) $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; \pi)$.
- 18) $\cos x = x^2 + x$ có nghiệm.
- 19) $x^5 - 5x^3 + x^2 + 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 20) $x^3 + 2020x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 21) $x^3 - 2018x^2 - 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.
- 22) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 23) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{2b}{3} - \frac{2}{3} = 0$ luôn có nghiệm.
- 24) $x^3 + 1011x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.
- 25) $x^4 - x - 3 = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1; 2)$ và $x_0 > \sqrt[7]{12}$.
- 26) $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 > \sqrt[3]{2}$.
- 27) $x^3 - 3x^2 - 1$ có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$. Không tính $f(\sqrt[5]{36})$; $f(1 + \sqrt[5]{36})$. Hãy chứng minh $x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$
- 28) $x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 thỏa mãn $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- 29) $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x_0 \in [0; 1]$ biết $2a + 2b + 3c = 0$.
- 30) $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc $(0; 1)$ với $2a + 3b + 6c = 0$.
- 31) $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ và thỏa mãn $2a + 6b + 19c = 0$.
- 32) $\tan^2 x + b \tan x + c = 0$ thỏa $2a + 3b + 6c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 33) $2x + 6\sqrt[6]{1-x} = 3$ có 3 nghiệm thuộc khoảng $(-7; 9)$.

BÀI 2 : Chứng minh rằng phương trình :

- 1) $m(x-1)(x+2) + 2x + 1 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 2) $m(x-1)^7(x-3) + 2x - 5 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 3) $m(x-1)^{2018}(x-3) + 2x - 5 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
- 4) $x^4 + mx^2 - (4m+1)x + 3m - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m .
- 5) $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

6) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = a$ luôn có nghiệm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ với mọi a .

7) $\cos x + m \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

8) $2\sin x + \cos x + m \cdot \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

9) $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

10) $(m^2 + 1)(x^3 - 1) - 6 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực với mọi số thực m .

11) $(m^2 + 2m + 3)x^4 + 2x - 2 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

12) $(m^2 + m + 3)(x - 2) + 4 = 0$ luôn luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

13) $2012x^{2012} + mx^{2013} - m^2x - 2010 = 0$ luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

14) $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

15) $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.

16) $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ luôn có một nghiệm dương với mọi m .

17) $(m^2 - m + 3).x^{2018} - 2x - 4 = 0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m

18) $(\sqrt{x-1})^3 + mx = m + 1$ luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

19) $x^3 - 3x = m$ có ít nhất hai nghiệm với mọi giá trị của $m \in (-2; 2)$.

20) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x} = m$ với $m > 3$ là tham số, luôn luôn có nghiệm và nghiệm đó là duy nhất.

21) $|x|^3 - mx^2 + (m+1)|x| - 2 = 0$ luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.

22) $mx^4 + 2x^2 - x - m = 0$ luôn luôn có 2 nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

23) $x^5 + 4mx^2 = (2m+1)x^3 + m$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.

BÀI 3 :

1) Chứng minh rằng phương trình : $a\cos^4 x + b\cos^3 x - 2c\cos x = 2a\sin^3 x$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c .

2) Chứng minh rằng phương trình : $a\sin 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm.

3) Chứng minh rằng phương trình : $ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a) = 0$ luôn có nghiệm.

4) Chứng minh rằng phương trình : $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$ luôn có nghiệm.

5) Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}m^2x^2 + 32$ (m là tham số). Chứng minh rằng : nếu $m < -2$ hay $m > 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa điều kiện $x_1 < 0 < x_2 < x_3$.

6) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ (1) và cho $m > 0$ thỏa $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$. Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(0; 1)$.

7) Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ đều liên tục trên $[0; 1]$ và $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình : $f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ luôn có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

BÀI 4 : Cho f là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và m, n là hai số dương tùy ý.

Chứng minh phương trình $f(x) = \frac{mf(a) + nf(b)}{m+n}$ có nghiệm thuộc $[a; b]$.

BÀI 5 : Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Chứng minh rằng với mọi dãy hữu hạn các số $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ đều thuộc đoạn $[a; b]$ thì phương trình :

$f(x) = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \dots + f(c_n)]$ luôn có nghiệm trong đoạn $[a; b]$.

BÀI 6 : Cho f là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Chứng minh với mọi cách chọn $x_i \in [a; b]$, $i = 1, \dots, n$ tồn tại $c \in [a; b]$ sao cho : $f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$.

-----♪ ♪ -----