

**BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

**C. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI****BÀI 20** : Giải các bất phương trình sau :

$$1) -5x^2 + 4x + 12 < 0 \quad 2) 16x^2 + 40x + 25 < 0 \quad 3) 3x^2 - 4x + 4 \geq 0 \quad 4) x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$5) \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0 \quad 6) \frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1 \quad 7) (2x + 1)(x^2 + x - 30) \geq 0 \quad 8) x^4 - 3x^2 \leq 0$$

ĐS : 1)  $x < -6/5 \vee x > 2$ ; 2)  $x \in \emptyset$ ; 3)  $x \in \mathbb{R}$ ; 4)  $-2 \leq x \leq 3$ ; 5)  $(x < 1) \vee (2 < x < 4) \vee (x > 7)$ ; 6)  $(x < -2) \vee (1 \leq x \leq 3) \vee (x > 5)$ ; 7)  $(-6 \leq x \leq -1/2) \vee (x \geq 5)$ ; 8)  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ ;

**BÀI 21** : Giải các bất phương trình sau :

$$1) \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \quad S = (-3; -2) \cup [-1; 1] \quad 2) \frac{1}{x^2 - 5x + 4} < \frac{1}{x^2 - 7x + 10} \quad S = (1; 2) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$$

$$3) 2 + \left| \frac{x^2 - 3}{x} \right| \leq \frac{x^4 - 6x^2 + 9}{x^2} \quad \underline{ĐS} : S = (-\infty; -3] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [3; +\infty)$$

**BÀI 22** : Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

$$1) y = \sqrt{(2x + 5)(1 - 2x)} \quad 2) y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1}} \quad 3) y = \sqrt{|x^2 + 3x - 4| - x + 8}$$

$$4) y = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{|2x - 1| - x - 2}} \quad 5) y = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 7x + 5} - \frac{1}{x^2 + 2x + 5}} \quad 6) y = \sqrt{\sqrt{x^2 - 5x - 14} - x + 3}$$

ĐS : 1)  $D = [-5/2; -2]$ ; 2)  $D = (-\infty; -4] \cup [-1/2; +\infty)$ ; 3)  $D = \mathbb{R}$ ; 4)  $D = (-\infty; -1/3) \cup (3; +\infty)$ ;

$$5) D = \left[ 0; \frac{7 - \sqrt{29}}{2} \right) \cup \left( \frac{7 + \sqrt{29}}{2}; 0 \right); 6) D = (-\infty; -2] \cup [23; +\infty)$$

$$\underline{ĐS} : -\frac{5}{3} \leq a < 1$$

**BÀI 23** : Tìm a sao cho với mọi x, ta luôn có :  $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7$ 

$$1) \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x^2 + 9x - 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x - 1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\underline{ĐS} : 1) -1 < x < 2; 2) S = \left[ -5; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4} \right] \cup \left( \frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; 2 \right); 3) S = \left( \frac{-9 + \sqrt{137}}{4}; 2 \right]; 4) S = \left[ -\frac{4}{3}; -1 \right] \cup [1; 3)$$

$$\underline{ĐS} : m < -\frac{8}{5} \vee m > 0$$

**D. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI****BÀI 26** : Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$  :

$$1) (m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1 \quad \underline{ĐS} : m < \frac{1}{2}$$

$$2) f(x) = (m + 4)x^2 - (3m + 1)x + 3m + 1 \quad \underline{ĐS} : m > -\frac{1}{3}$$

**BÀI 27** : Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$  :

$$1) -x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1 \quad \underline{ĐS} : m \in \mathbb{R}$$

$$2) (m - 2)x^2 - 2(m - 3)x + m - 1 \quad \underline{ĐS} : m \in \emptyset$$

**BÀI 28** : Tìm các giá trị của m để mỗi phương trình sau có nghiệm :

$$1) (m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$$

$$2) (m + 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$$



**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**C. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

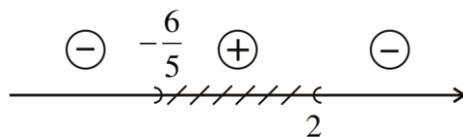
**BÀI 20 :** Giải các bất phương trình sau :

- 1)  $-5x^2 + 4x + 12 < 0$       2)  $16x^2 + 40x + 25 < 0$       3)  $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$       4)  $x^2 - x - 6 \leq 0$   
 5)  $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$       6)  $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$       7)  $(2x + 1)(x^2 + x - 30) \geq 0$       8)  $x^4 - 3x^2 \leq 0$

**ĐS :** 1)  $x < -6/5 \vee x > 2$ ; 2)  $x \in \emptyset$ ; 3)  $x \in \mathbb{R}$ ; 4)  $-2 \leq x \leq 3$ ; 5)  $(x < 1) \vee (2 < x < 4) \vee (x > 7)$ ; 6)  $(x < -2) \vee (1 \leq x \leq 3) \vee (x > 5)$ ; 7)  $(-6 \leq x \leq -1/2) \vee (x \geq 5)$ ; 8)  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ ;

▪ **Hướng dẫn :**

1)  $-5x^2 + 4x + 12 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{6}{5}$  hoặc  $x > 2$



Tập nghiệm của bất phương trình là :  $S = (-\infty; -\frac{6}{5}) \cup (2; +\infty)$ .

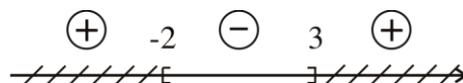
2)  $16x^2 + 40x + 25 < 0 \Leftrightarrow (4x + 5)^2 < 0$  : vô nghiệm

Tập nghiệm của bất phương trình là :  $S = \emptyset$ .

3)  $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$  vì tam thức bậc hai  $3x^2 - 4x + 4$  có  $\Delta' = 4 - 12 < 0$  và  $a = 3 > 0$ . Tập nghiệm của bất phương trình là  $S = \mathbb{R}$ .

4)  $x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :  $S = [-2; 3]$ .



5)  $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$

x	$-\infty$	1	2	4	7	$+\infty$
$x^2 - 9x + 14$	+	+	0	-	0	+
$x^2 - 5x + 4$	+	0	-	0	+	+
f(x)	+	-	0	+	-	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (-\infty; 1) \cup (2; 4) \cup (7; +\infty)$ .

6)  $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$-4x^2 + 4x - 3$	-	-	0	+	0	-
$x^2 - 3x - 10$	+	0	-	-	0	+
$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x - 10}$	-	+	0	-	+	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$ .

7)  $(2x + 1)(x^2 + x - 30) \geq 0$ . Ta có :  $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x - 30) \geq 0$

x	$-\infty$	-6	$-\frac{1}{2}$	5	$+\infty$
$2x + 1$	-	-	0	+	+
$x^2 + x - 30$	+	0	-	0	+
f(x)	-	0	+	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $S = [-6; -\frac{1}{2}] \cup [5; +\infty)$ .

8)  $x^4 - 3x^2 \leq 0$

Ta có :  $x^4 - 3x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ . Vậy  $S = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ .

**BÀI 21** : Giải các bất phương trình sau :

1)  $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \quad S = (-3; -2) \cup [-1; 1] \quad 2) \frac{1}{x^2 - 5x + 4} < \frac{1}{x^2 - 7x + 10} \quad S = (1; 2) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$

3)  $2 + \left| \frac{x^2 - 3}{x} \right| \leq \frac{x^4 - 6x^2 + 9}{x^2} \quad \underline{ĐS} : S = (-\infty; -3] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [3; +\infty)$

▪ **Hướng dẫn** :

1)  $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$ .

Ta có :  $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 1)}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$  (vì  $x^2 \geq 0$ ) (1)

Xét dấu  $f(x)$  (vế trái của bất phương trình (1))

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	+	+	0	-	+
$x^2 + 5x + 6$	+	0	0	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	0	-	+

Tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (-3; -2) \cup [-1; 1]$ .

2)  $\frac{1}{x^2 - 5x + 4} < \frac{1}{x^2 - 7x + 10} \quad S = (1; 2) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$

Ta có :  $\frac{1}{x^2 - 5x + 4} < \frac{1}{x^2 - 7x + 10} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 4} - \frac{1}{x^2 - 7x + 10} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 6}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 10)} < 0$  (i)

\* Xét dấu  $f(x)$  (vế trái của bất phương trình (i))

x	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$
$-2x + 6$	+	+	+	0	-	-	-
$x^2 - 5x + 4$	+	0	-	-	0	+	+
$x^2 - 7x + 10$	+	+	0	-	-	-	+
$f(x)$	+	-	+	0	-	+	-

Tập nghiệm của bất phương trình là  $S = (1; 2) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$ .

3)  $2 + \left| \frac{x^2 - 3}{x} \right| \leq \frac{x^4 - 6x^2 + 9}{x^2} \quad \underline{ĐS} : S = (-\infty; -3] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [3; +\infty)$

Đặt  $t = \left| \frac{x^2 - 3}{x} \right| \geq 0$ . Ta được : (4)  $\Leftrightarrow 2 + t \leq t^2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -1$  (loại) hay  $t \geq 2$  (nhận)

$\Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 3}{x} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 6x^2 + 9}{x^2} \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^4 - 6x^2 + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 \leq 1 \\ x^2 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ -1 \leq x < 0 \\ 0 < x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Tập nghiệm của bất phương trình là :  $S = (-\infty; -3] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [3; +\infty)$ .

**BÀI 22** : Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

1)  $y = \sqrt{(2x + 5)(1 - 2x)}$  xác định khi và chỉ khi :  $(2x + 5)(1 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ . Vậy txđ  $D = \left[ -\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right]$



x	$-\infty$	-2	3	7	$+\infty$	
$x^2 - 5x - 14$	+	0	-	-	0	+
$x - 3$	-	-	0	+	+	+

• Khi  $x \leq -2$  thì (1) đúng.

• Khi  $x \geq 7$  thì (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 5x - 14 \geq (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \geq 23 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 23$

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = (-\infty; -2] \cup [23; +\infty)$ .

**BÀI 23 :** Tìm các giá trị của a sao cho với mọi x, ta luôn có  $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7$  (1),  $\forall x \in \mathbf{R}$

Tam thức  $2x^2 - 3x + 2$  có  $\begin{cases} \Delta = -7 \\ a = 2 > 0 \end{cases}$  nên  $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$

Do đó : (1)  $\Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 2 \leq x^2 + 5x + a < 14x^2 - 21x + 14, \forall x \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + a + 2 \geq 0 & (a) \\ 13x^2 - 26x - a + 14 > 0 & (b) \end{cases}, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'(a) = 1 - 3(a+2) \leq 0 \\ \Delta'(b) = 169 - 13(14-a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{5}{3} \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq a < 1$ . Vậy  $-\frac{5}{3} \leq a < 1$

**BÀI 24 :** Giải các hệ bất phương trình sau :

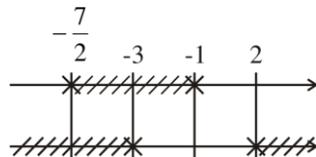
$$1) \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x^2 + 9x - 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$$

ĐS : 1)  $-1 < x < 2$ ; 2)  $S = \left[-5; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right] \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; 2\right)$ ; 3)  $S = \left(\frac{-9 + \sqrt{137}}{4}; 2\right]$ ; 4)  $S = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$

▪ **Hướng dẫn :**

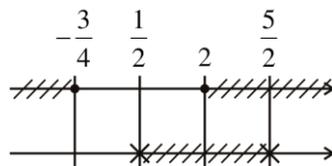
Giải từng bất phương trình của hệ rồi tìm phần giao của hai tập nghiệm của hai bất phương trình thuộc hệ.

1)  $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x > -1 \\ -3 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$



Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là  $S = (-1; 2)$ .

2)  $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4} \leq x \leq 2 \\ x < \frac{1}{2} \text{ hoặc } x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq x < \frac{1}{2}$



Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là  $S = \left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ .

3)  $\begin{cases} 2x^2 + 9x - 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-9 - \sqrt{137}}{4} \text{ hay } x > \frac{-9 + \sqrt{137}}{4} \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-9 + \sqrt{137}}{4} < x \leq 2$ . Vậy  $S = \left(\frac{-9 + \sqrt{137}}{4}; 2\right]$

4)  $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 & (1) \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 & (2) \end{cases}$

• Giải  $x^2 - 9 < 0$ . Bằng cách lập các bảng xét dấu, ta được :  $x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

• Giải  $(x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq -1$  hay  $x \geq 1$

Do đó, ta có:  $\begin{cases} -3 < x < 3 \\ -\frac{4}{3} \leq x \leq -1 \text{ hay } x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq -1 \text{ hay } 1 \leq x < 3$ . Vậy  $S = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$ .

**BÀI 25 :** Tìm các giá trị của m để hệ bất phương trình sau có nghiệm :  $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (m+1)x \geq 3 \end{cases}$ .

▪ **Hướng dẫn :**

• Giải BPT :  $x^2 + 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 3$

• Ta có :  $(m+1)x \geq 3$

– Nếu  $m = -1$  thì  $(m+1)x \geq 3 \Leftrightarrow 0x \geq 3$  : vô nghiệm  $\Rightarrow$  hệ vô nghiệm, nên loại  $m = -1$ .

– Nếu  $m > -1$  thì  $(m+1)x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{m+1}$

• Hệ có nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{3}{m+1} < 3 \Leftrightarrow m > 0$  (thỏa  $m > -1$ )

– Nếu  $m \geq -1$  thì  $(m+1)x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{m+1}$

• Hệ có nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{3}{m+1} > -5 \Leftrightarrow 3 < -5m - 5 \Leftrightarrow m < -\frac{8}{5}$  (thỏa  $m < -1$ )

Tóm lại hệ có nghiệm khi và chỉ khi :  $m < -\frac{8}{5}$  hay  $m > 0$

## D. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

**BÀI 26 :** Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương với mọi  $x \in \mathbb{R}$  :

1)  $(m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$       ĐS :  $m < \frac{1}{2}$

2)  $f(x) = (m+4)x^2 - (3m+1)x + 3m+1$       ĐS :  $m > -\frac{1}{3}$

▪ **Hướng dẫn :**

**Nhớ :**  $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

1) Đặt  $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$

2) Đặt  $f(x) = (m+4)x^2 - (3m+1)x + 3m+1$

• TH1 :  $a = m+4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Khi đó :  $f(x) = 11x - 11 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow x > 1$  (không thỏa với mọi  $x$ )  $\Rightarrow m = -4$  (loại)

• TH2 :  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 > 0 \\ (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ (3m+1)(-m-15) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m < -15 \vee m > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$

Vậy m thỏa yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$ .

**BÀI 27 :** Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm với mọi  $x \in \mathbb{R}$  :

1)  $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1$       ĐS :  $m \in \mathbb{R}$

2)  $(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m-1$       ĐS :  $m \in \emptyset$

▪ **Hướng dẫn :**

1) Đặt  $f(x) = -x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1$ , ta có :  $f(x) < 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \Delta' = 2m^2 - (2m^2 + 1) = -1 < 0, \forall m$

Vậy  $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1 < 0$  với mọi  $x, m \in \mathbb{R}$

2) Đặt  $f(x) = (m-2)x^2 - 2(m+3)x + m-1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

• **TH1** :  $a = m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Khi đó :  $f(x) = -10x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > 1/10 \Rightarrow m = -4$  (loại do không thỏa với mọi  $x$ )

• **TH2** :  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-3)^2 - (m-2)(m-1) = -3m+7 < 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{7}{3} \\ m < 2 \end{cases} : \text{vô lí}$$

Vậy không có bất kì giá trị nào của  $m$  để đề bài thỏa mãn.

**BÀI 28** : Tìm các giá trị của  $m$  để mỗi phương trình sau có nghiệm :

1)  $(m-5)x^2 - 4mx + m-2 = 0$

2)  $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 2m-3 = 0$

3)  $x^2 + (m-2)x - 2m+3 = 0$

**ĐS** :  $m \leq -\frac{10}{3} \vee m \geq 1$  ; 2)  $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$  ; 3)  $m \leq -2(1+\sqrt{3}) \vee m \geq -2(1-\sqrt{3})$

▪ **Hướng dẫn** :

**1)**  $(m-5)x^2 - 4mx + m-2 = 0$  (1)

•  $m-5 = 0 \Leftrightarrow m = 5$  : phương trình (1) trở thành  $-20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{20}$  tức là phương trình (1) có nghiệm,

nên nhận  $m = 5$  (a)

•  $m-5 \neq 0$  : phương trình (1) có  $\Delta' = (-2m)^2 - (m-5)(m-2) = 3m^2 + 7m - 10$

(1) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{10}{3}$  hay  $m \geq 1$  ( $m \neq 5$ ) (b)

(a) và (b) cho : phương trình (1) có nghiệm khi  $m \leq -\frac{10}{3}$  hay  $m \geq 1$ .

**2)**  $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 2m-3 = 0$  (1)

•  $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$  : phương trình (1) trở thành  $-4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$  tức là phương trình (1) có nghiệm,

nên nhận  $m = -1$  (a)

•  $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$  : phương trình (1) có  $\Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(2m-3) = -m^2 - m + 4$

(1) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$  và  $m \neq -1$  (b)

(a) và (b) cho : phương trình (1) có nghiệm khi  $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ .

**3)**  $x^2 + (m-2)x - 2m+3 = 0$  (1)

Phương trình (1) có  $\Delta = (m-2)^2 - 4(-2m+3) = m^2 + 4m - 8$

(1) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2(1+\sqrt{3}) \vee m \geq -2(1-\sqrt{3})$

**BÀI 29** : Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm dù  $m$  lấy bất kỳ giá trị nào :

1)  $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$

2)  $(m^2 + 1)x^2 + 2(m+2)x + 6 = 0$

▪ **Hướng dẫn** :

**1)**  $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$  (1)

$\Delta' = (m+1)^2 - (2m^2 + m + 3) = -m^2 + m - 2$

Tam thức  $\Delta'$  có :  $\begin{cases} \delta = 1-8 = -7 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases}$  nên  $\Delta' < 0, \forall m$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm dù  $m$  lấy bất kỳ giá trị nào.

• **Chú ý** :  $-m^2 + m - 2 = -(m^2 - m + 2) = -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2\right] = -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0, \forall m$



**BÀI 32 :** Định m để bất phương trình :

1)  $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

ĐS :  $m > 5$

2)  $mx^2 + 6mx + 8m - 10 \geq 0$  vô nghiệm.

ĐS :  $-10 < m \leq 0$

3)  $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 < 0$  có nghiệm.

ĐS :  $m < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

4)  $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0$  có nghiệm.

ĐS :  $m \geq -2$

• **Chú ý 1 :**

1)  $f(x) < 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$       2)  $f(x) > 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

3)  $f(x) > 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$       4)  $f(x) \leq 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

5) Tìm m để  $f(x) < 0$  có nghiệm.

Ta giải  $f(x) < 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm được giá trị của m rồi kết luận ngược lại.

6) Tìm m để  $f(x) \geq 0$  có nghiệm

Ta giải  $f(x) \geq 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm được giá trị của m rồi kết luận ngược lại.

• **Chú ý 2 :** khi hệ số a có chứa tham số thì cần xét hai trường hợp  $a = 0$  và  $a \neq 0$ .

1)  $(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 3m - 6 > 0$  nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .      ĐS :  $m > 5$

Đặt  $f(x) = (m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 3m - 6$

• TH1 :  $a = 0 \Leftrightarrow m = 1 : (1) \Leftrightarrow 4x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4} \Rightarrow m = 1$  không thỏa

• TH2 :  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 : (1) \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ (m + 1)^2 - (m - 1)(3m - 6) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2m^2 + 11m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \frac{1}{2} \vee m > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m > 5$

Kết luận : (1) thỏa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 5$

2)  $mx^2 + 6mx + 8m - 10 \geq 0$  vô nghiệm.      ĐS :  $-10 < m \leq 0$

Đặt  $f(x) = mx^2 + 6mx + 8m - 10$ , ta có  $f(x) \geq 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

• TH1 :  $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 : f(x) = -10 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 0$  (thỏa)

• TH2 :  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 9m^2 - m(8m - 10) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + 10m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -10 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < m < 0$

Kết luận : m thỏa yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow -10 < m \leq 0$ .

3)  $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3 < 0$  có nghiệm.      ĐS :  $m < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

Đặt  $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3$ . Ta có  $f(x) < 0$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

• TH1 :  $a = 0 \Leftrightarrow m = -1 : f(x) = 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4} \Rightarrow m = -1$  (không thỏa)

• TH2 :  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 : f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (m - 1)^2 - (m + 1)(2m - 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m^2 - m + 4 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \vee m \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} (\approx 1,56)$

Do đó  $m \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$  là điều kiện để  $f(x) < 0$  vô nghiệm. Suy ra rằng  $f(x) < 0$  có nghiệm khi  $m < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

