

## MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ NHÂN DẠNG TAM GIÁC

GVBM : ĐOÀN NGỌC DŨNG

### BÀI 1 :

1) Chứng minh rằng nếu  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$  thì tam giác ABC vuông tại A.

#### ▪ Hướng dẫn :

$$\text{Ta có : } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin 2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} \Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$\text{Mà } A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A \Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{B+C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \text{ và } \cos\frac{B+C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$$

$$\text{Do đó : } 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\left(2\sin^2\frac{A}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{A}{2} = 0 & (1) \\ \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Vì A là góc của tam giác tức  $0 < A < \pi$  nên :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \pi \text{ (loại)}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A}$$

2) Chứng minh rằng nếu  $\frac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A$  thì tam giác ABC là tam giác cân.

#### ▪ Hướng dẫn :

$$\text{Ta có : } \frac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A \Leftrightarrow \sin B = 2\cos A \cdot \sin C \quad (1)$$

$$\text{Mà } A + B + C = \pi \Rightarrow B = \pi - (A + C) \Rightarrow \sin B = \sin[\pi - (A + C)] = \sin(A + C)$$

$$\text{Do đó từ (1) ta có : } \sin(A + C) = 2\cos A \cdot \sin C \Leftrightarrow \sin A \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A = 2\cos A \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin A \cdot \cos C = \cos A \cdot \sin C \Leftrightarrow \sin A \cdot \cos C - \cos A \cdot \sin C = 0 \Leftrightarrow \sin(A - C) = 0$$

$$\text{Vì A, V là các góc của một tam giác nên : } \sin(A - C) = 0 \Rightarrow A - C = 0 \Rightarrow A = C$$

Vậy  $\Delta ABC$  cân tại B.

3) Chứng minh rằng nếu  $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$  thì tam giác ABC vuông hay cân.

#### ▪ Hướng dẫn :

$$\text{Ta có : } \frac{\tan B}{\tan C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} \Rightarrow \tan B \cdot \sin^2 C = \tan C \cdot \sin^2 B \Leftrightarrow \frac{\sin B \cdot \sin^2 C}{\cos B} = \frac{\sin C \cdot \sin^2 B}{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\cos C} \quad (\text{vì } \sin B \neq 0, \sin C \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin C \cdot \cos C = \sin B \cdot \cos B \Leftrightarrow 2\sin C \cdot \cos C = 2\sin B \cdot \cos B \Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2B \quad (1)$$

$$\text{Do } 0 < 2B < 2\pi \text{ và } 0 < 2C < 2\pi \text{ nên từ (1) ta suy ra : } \begin{cases} 2C = 2B \\ 2C = \pi - 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A} \\ B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A} \end{cases}$$

**BÀI 2 :** Định dạng các tam giác, biết các góc A, B, C thỏa mãn điều kiện sau:

1)  $\sin A = \cos B + \cos C$

2)  $\sin A = 2\sin B \cdot \cos C$

3)  $\sin A = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$

4)  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos A + \sin C}$

5)  $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \cdot \sin B$

6)  $\cos A + \cos B + \cos C = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$

▪ **Hướng dẫn :**

Ta có:  $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right) = \cos \frac{B+C}{2} \\ \cos \frac{A}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right) = \sin \frac{B+C}{2} \end{cases}$$

**1)  $\sin A = \cos B + \cos C$**

Ta có:  $\sin A = \cos B + \cos C$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = 2\cos \left( \frac{B+C}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{B-C}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = 2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \left( \frac{B-C}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} = \cos \left( \frac{B-C}{2} \right), \left( \text{do } \sin \frac{A}{2} > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} = \left| \frac{B-C}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow A = |B-C|; \left( \text{do } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}, \left| \frac{B-C}{2} \right| < \frac{\pi}{2} \right)$$

• Nếu  $B > C$  thì  $A = B - C \Rightarrow B = A + C = \frac{\pi}{2}$ .

• Nếu  $C > B$  thì  $A = C - B \Rightarrow C = A + B = \frac{\pi}{2}$ .

Vậy tam giác vuông tại B hoặc C.

**2)  $\sin A = 2\sin B \cdot \cos C$**

$$\Leftrightarrow \sin A = \sin(B+C) + \sin(B-C)$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \sin(\pi - A) + \sin(B-C)$$

$$\Leftrightarrow \sin(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C \left( \text{do } 0 \leq |B-C| < \pi \right)$$

Vậy tam giác cân tại A.

**3)  $\sin A = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$**

$$\Leftrightarrow \sin A = \frac{2\cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}{2\sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

Vậy tam giác vuông tại A.

$$4) \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos A + \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{2\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}} = \frac{2\cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}{2\sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A-C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \cos \left( A - \frac{C}{2} \right) + \cos \frac{C}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( B - \frac{C}{2} \right) + \cos \frac{C}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( A - \frac{C}{2} \right) = \cos \left( B - \frac{C}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left| A - \frac{C}{2} \right| = \left| B - \frac{C}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A + B = C \end{cases}$$

Vậy tam giác cân hoặc vuông tại C.

$$5) \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \cdot \sin B$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A+B)\cos(A-B) = 2[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\Leftrightarrow \sin C \cdot \cos(A-B) = \cos(A-B) + \cos C$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin C)\cos(A-B) + \cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 C)\cos(A-B) + (1 + \sin C)\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C \cdot \cos(A-B) + (1 + \sin C)\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C [\cos C \cdot \cos(A-B) + 1 + \sin C] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C = 0$$

$$\text{Do } \cos C \cdot \cos(A-B) + 1 + \sin C = -\cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + 1 + \sin C$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + 1 + \sin C$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) + \sin C > 0 \Leftrightarrow C = 90^\circ$$

Vậy tam giác vuông tại C.

$$\text{6)} \cos A + \cos B + \cos C = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{f) Ta có : } \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \Rightarrow \cos A + \cos B &\leq 2 \sin \frac{C}{2} \quad (1) \quad \left( \text{do } 0 < \cos \frac{A-B}{2} \leq 1 \right) \end{aligned}$$

Tương tự :

$$\cos B + \cos C \leq 2 \sin \frac{A}{2} \quad (2)$$

$$\cos C + \cos A \leq 2 \sin \frac{B}{2} \quad (3)$$

$$\text{Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được : } \cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{B-C}{2} = \cos \frac{C-A}{2} = 1 \Leftrightarrow A = B = C$$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

**BÀI 3 :** Chứng minh rằng nếu :  $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$  thì tam giác ABC đều.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Ta có : } \cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \left[ \frac{\cos(B+C) + \cos(B-C)}{2} \right] - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\cos A \cos(B-C) + \cos^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos A - \cos(B-C)]^2 + \sin^2(B-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A = \cos(B-C) \\ \sin(B-C) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

**BÀI 4 :** Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức :  $\cos A + \cos B + \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0$  (1)

Chứng minh tam giác ABC đều.

▪ Hướng dẫn :

$$\text{Ta có : } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$$

$$\text{Vậy (1)} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos A \cos B \cos C > 0 \Rightarrow \Delta ABC \text{ nhọn}$$

Ta lại có :

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \leq \frac{1}{2} [\cos(A+B) + 1] \quad (\text{vì } 0 < \cos(A-B) \leq 1)$$

$$\Rightarrow \cos A \cos B \leq \frac{1}{2} (1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2} \quad (\text{vì } -\cos C = \cos(A+B))$$

$$\text{Tương tự : } \cos B \cos C \leq \sin^2 \frac{A}{2}; \cos C \cos A \leq \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C \leq \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow A = B = C \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$