

**ĐÁP ÁN CỦA BGD VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN**

GVBM : **ĐOÀN NGỌC DŨNG**

**BÀI 1 :** (ĐH A 2002) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của SB, SC. Tính theo a diện tích  $\Delta AMN$ , biết rằng  $(AMN) \perp (SBC)$ .

▪ **Hướng dẫn :**

Gọi K là trung điểm của BC và  $I = SK \cap MN$ .

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, MN \parallel BC$$

$\Rightarrow I$  là trung điểm của SK và MN

Ta có  $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow$  hai trung tuyến tương ứng  $AM = AN$

$\Rightarrow \Delta AMN$  cân tại A  $\Rightarrow AI \perp MN$

Mặt khác

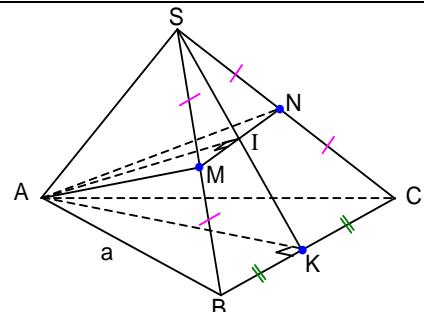
$$\begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$$

Suy ra  $\Delta SAK$  cân tại A  $\Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \text{ (đvdt)}$$



**BÀI 2 :** (ĐH B 2002) Cho hình lập phương ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> có cạnh bằng a.

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A<sub>1</sub>B và B<sub>1</sub>D.

b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh B<sub>1</sub>B, CD, A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C<sub>1</sub>N.

▪ **Hướng dẫn :**

$$\begin{cases} A_1B \perp AB_1 \\ A_1B \perp AD \end{cases} \Rightarrow A_1B \perp (AB_1C_1D) \Rightarrow A_1B \perp B_1D$$

Tương tự:  $A_1C_1 \perp B_1D \Rightarrow B_1D \perp (A_1B C_1)$

Gọi G = B<sub>1</sub>D  $\cap (A_1B C_1)$ .

Do  $B_1A_1 = B_1B = B_1C_1 = a$  nên  $GA_1 = GB = GC_1$

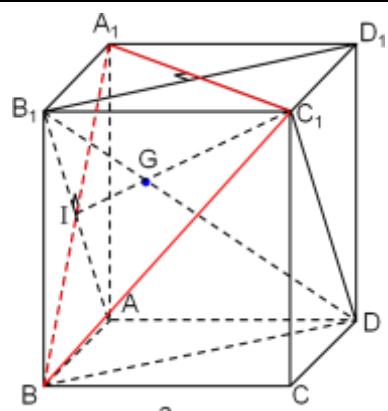
$\Rightarrow G$  là tâm tam giác đều  $A_1B C_1$  có cạnh bằng  $a\sqrt{2}$

Gọi I là trung điểm của  $A_1B$  thì  $IG$  là đường vuông góc chung của

$$A_1B \text{ và } B_1D, \text{ nên: } d(A_1B, B_1D) = IG = \frac{1}{3}C_1I = \frac{1}{3}A_1B \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

b) Gọi E là trung điểm của CC<sub>1</sub> thì  $ME \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow$  hình chiếu vuông góc của MP trên  $(CDD_1C_1)$  là  $ED_1$ . Ta có :

$\Delta C_1CN = \Delta D_1C_1E \Rightarrow C_1D_1E = CC_1N = 90^\circ - D_1C_1N \Rightarrow D_1E \perp C_1N$  Từ đây, theo định lý ba đường vuông góc ta có  $MP \perp C_1N$ .



**BÀI 3 :** (ĐH D 2002) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

▪ Hướng dẫn :

▪ Cách 1 :

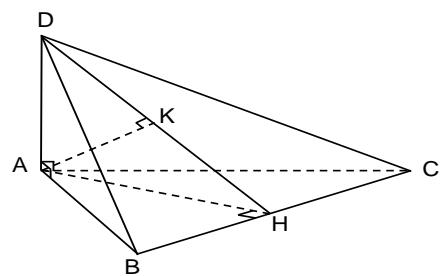
Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó  $AB \perp AC$ . Lại có  $AD \perp mp(ABC) \Rightarrow AD \perp AB$  và  $AD \perp AC$  nên  $AB, AC, AD$  đồng một vuông góc với nhau.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC ; AK là đường cao của tam giác ADH thì AK chính là khoảng cách cần tính.

$$\text{Để dàng chứng minh được hệ thức : } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Thay  $AC = AD = 4\text{cm}$  ;  $AB = 3\text{cm}$

$$\text{vào hệ thức trên ta tính được : } AK = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ cm}$$



▪ Cách 2 :

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó  $AB \perp AC$ . Lại có  $AD \perp mp(ABC) \Rightarrow AD \perp AB$  và  $AD \perp AC$  nên  $AB, AC, AD$  đồng một vuông góc với nhau. Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có :

$$V = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD = 8$$

$$\text{Áp dụng công thức } AK = \frac{3V}{dt(\Delta BCD)} \text{ với } V = 8$$

$$\text{và } dt(\Delta BCD) = 2\sqrt{34} \text{ ta tính được } AK = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ cm}$$

**BÀI 4 :** (ĐH A 2003) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo của góc phẳng nhị diện [B,A'C,D]

▪ Hướng dẫn :

Đặt  $AB = a$ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên  $A'C$ , suy ra  $BH \perp A'C$ , mà  $BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp A'C$ , do đó  $A'C \perp (BHD) \Rightarrow A'C \perp DH$ . Vậy góc phẳng nhị diện  $[B; A'C; D]$  là góc BHD.

Xét  $\Delta A'DC$  vuông tại D có DH là đường cao, ta có

$$DH \cdot A'C = CD \cdot A'D \Rightarrow DH = \frac{CD \cdot A'D}{A'C} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Tương tự, } \Delta A'BC \text{ vuông tại B có BH là đường cao và } BH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Mặt khác : } 2a^2 = BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH \cdot DH \cos \hat{BHD}$$

$$= \frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2 \cdot \frac{2a^2}{3} \cos \hat{BHD}. \text{ Do đó } \cos \hat{BHD} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{góc BHD} = 120^\circ$$

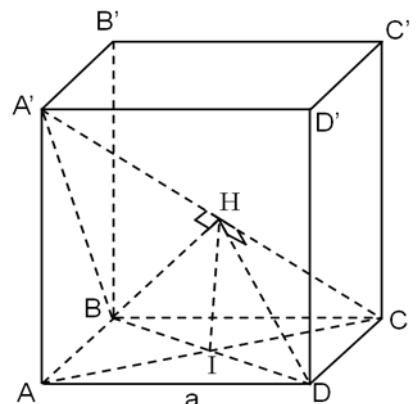
▪ Cách khác :

Ta có  $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp A'C$  (định lý ba đường vuông góc)

Tương tự,  $BC' \perp A'C \Rightarrow (BC'D) \perp A'C$ . Gọi H là giao điểm của  $A'C$  và  $(BC'D) \Rightarrow$  góc BHD là góc phẳng của  $[B; A'C; D]$

Các tam giác vuông HA'B, HA'D, HA'C bằng nhau

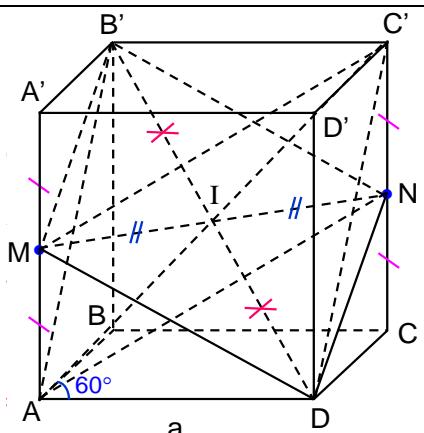
$$\Rightarrow HB = HC' = HD \Rightarrow H \text{ là tâm } \Delta BC'D \text{ đều} \Rightarrow \text{góc BHD} = 120^\circ$$



**BÀI 5 :** (ĐH B 2003) Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc  $BAD = 60^\circ$ . Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

▪ Hướng dẫn :

Ta có  $A'M \parallel NC \Rightarrow A'MCN$  là hình bình hành, do đó  $A'C$  và  $MN$  cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Mặt khác  $A'DCB'$  là hình bình hành nên trung điểm I của  $A'C$  cũng chính là trung điểm của  $B'D$ . Vậy  $MN$  và  $B'D$  cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên  $B'MDN$  là hình bình hành. Do đó  $B'$ , M, D, N thuộc cùng một mặt phẳng. Mặt khác  $DM^2 = DA^2 + AM^2 = DC^2 + CN^2 = DN^2$ , hay  $DM = DN$ . Vậy hình bình hành  $B'MDN$  là hình thoi. Do đó  $B'MDN$  là hình vuông  $\Leftrightarrow MN = B'D \Leftrightarrow AC = B'D$   
 $\Leftrightarrow AC^2 = B'D^2 = B'B^2 + BD^2 \Leftrightarrow 3a^2 = B'B^2 + a^2$   
 $\Leftrightarrow BB' = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$



**BÀI 6 :** (ĐH D 2003) Cho hai mặt phẳng ( $P$ ) và ( $Q$ ) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng  $\Delta$ . Trên  $\Delta$  lấy hai điểm A, B với  $AB = a$ . Trong mp( $P$ ) lấy điểm C, trong mp( $Q$ ) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với  $\Delta$  và  $AC = BD = AB$ . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và  $d(A; (BCD))$ .

▪ Hướng dẫn :

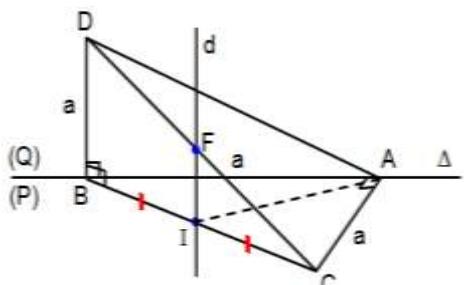
Ta có  $(P) \perp (Q)$  và  $\Delta = (P) \cap (Q)$ , mà  $AC \perp \Delta \Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD$ , hay góc  $CAD = 90^\circ$

Tương tự, ta có  $BD \perp \Delta \Rightarrow BD \perp (P)$ , do đó góc  $CBD = 90^\circ$

Vậy A và B nằm trên mặt cầu đường kính CD và bán kính của mặt cầu là :  $R = \frac{CD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + BD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi I là trung điểm của BC  $\Rightarrow AI \perp BC$ . Do  $BD \perp (P)$  nên  $BD \perp AI \Rightarrow AI \perp (BCD)$ .

Vậy AH là khoảng cách từ A đến  $(BCD)$  và  $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



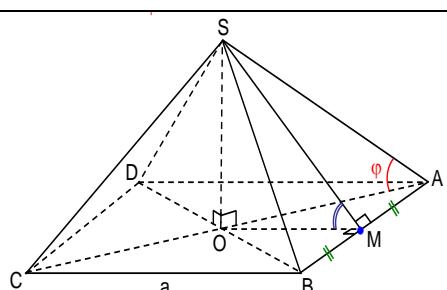
**BÀI 7 :** (ĐH B 2004) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $\varphi$  ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ). Tính tan của góc giữa mặt phẳng ( $SAB$ ) và ( $ABCD$ ) theo  $\varphi$ . Tính  $V_{S.ABCD}$  theo a và  $\varphi$ .

▪ Hướng dẫn :

Gọi giao điểm của AC và BD là O thì  $SO \perp (ABCD)$ , suy ra góc  $SAO = \varphi$ . Gọi trung điểm của AB là M thì  $OM \perp AB$  và  $SM \perp AB \Rightarrow$  góc giữa hai mặt phẳng ( $SAB$ ) và ( $ABCD$ ) là góc  $SMO$ . Tam giác OAB vuông cân tại O, nên  $OM = \frac{a}{2}$ ,  $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi$ .

Do đó :  $\tan SMO = \frac{SO}{OM} = \sqrt{2} \tan \varphi$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \tan \varphi$$



**BÀI 8 :** (ĐH A 2006) Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

▪ **Hướng dẫn :**

Kẻ đường sinh AA'. Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên đường thẳng A'D.

Do  $BH \perp A'D$  và  $BH \perp AA'$  nên  $BH \perp (AOO'A')$ .

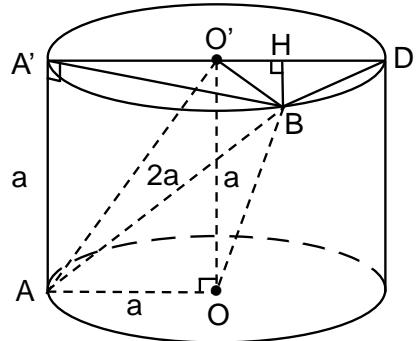
$$\text{Suy ra : } V_{OO'AB} = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot S_{AOO'}$$

$$\text{Ta có : } A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{3a} \Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a$$

$$\Rightarrow \Delta BO'D \text{ đều} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } AOO' \text{ là tam giác vuông cân cạnh bên bằng } a \text{ nên : } S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$$

$$\text{Vậy thể tích khối tứ diện } OO'AB \text{ là : } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$$



**BÀI 9 :** (ĐH B 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng  $(SAC) \perp (SMB)$ . Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

▪ **Hướng dẫn :**

$$\text{Xét } \Delta ABM \text{ và } \Delta BCA \text{ vuông có } \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC}$$

$$\Rightarrow \Delta ABM \text{ đồng dạng } \Delta BCA \Rightarrow \text{góc } ABM = \text{góc } BCA$$

$$\Rightarrow \text{góc } ABM + \text{góc } BAC = \text{góc } BCA + \text{góc } BAC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{góc } AIB = 90^\circ \Rightarrow MB \perp AC \quad (1)$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$$

Gọi H là trung điểm của AC  $\Rightarrow NH$  là đường trung bình của  $\Delta SAC$

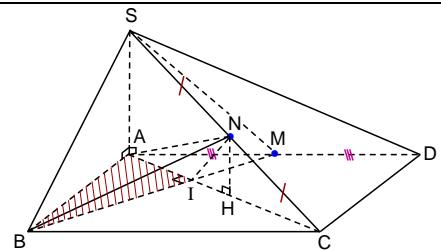
$$\Rightarrow NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \text{ và } NH \parallel SA \text{ nên } NH \perp (ABI)$$

$$\text{do đó } V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH \cdot S_{\Delta ABI}$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$BI^2 = AB^2 - AI^2 \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$



**BÀI 10 :** (ĐH D 2006) Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Tính  $V_{A.BCNM}$ .

▪ Hướng dẫn :

Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SK. Do  $BC \perp AK$ ,  $BC \perp SA$  nên  $BC \perp AH$ .

Do  $AH \perp SK$ ,  $AH \perp BC$  nên  $AH \perp (SBC)$ .

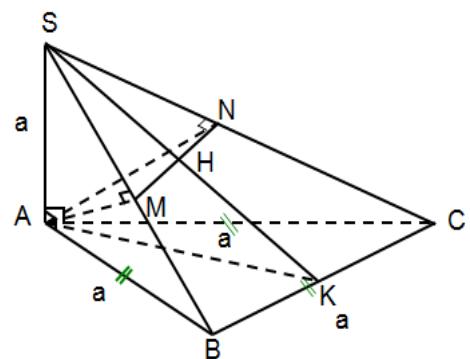
$$\text{Xét tam giác vuông } SAK : \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAB : SA^2 = SM \cdot SB \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAC : SA^2 = SN \cdot SC \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Suy ra : } \frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{16}{25} \Rightarrow S_{BCNM} = \frac{9}{25} S_{SBC} = \frac{9\sqrt{19}a^2}{100}$$

$$\text{Vậy thể tích của khối chóp } A.BCNM : V = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BCNM} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$$



**BÀI 11 :** (ĐH A 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và thể tích của khối tứ diện CMNP.

▪ Hướng dẫn :

Gọi H là trung điểm của AD. Do  $\Delta SAD$  đều nên  $SH \perp AD$ .

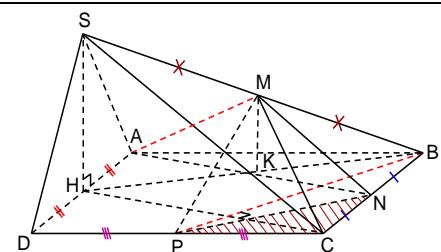
$$\text{Do } (SAD) \perp (ABCD) \text{ nên } SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP \quad (1)$$

$$\text{Xét hình vuông ABCD ta có : } \Delta CDH = \Delta BCP \Rightarrow CH \perp BP \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $BP \perp (SHC)$ . Vì  $MN \parallel SC$  và  $AN \parallel CH$  nên  $(AMN) \parallel (SHC)$ . Suy ra :  $BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$

$$\text{Kẻ } MK \perp (ABCD), K \in (ABCD). \text{ Ta có : } V_{CMNP} = \frac{1}{3} MK \cdot S_{CNP}.$$

$$\text{Vì } MK = \frac{1}{2} SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}, S_{CNP} = \frac{1}{2} CN \cdot CP = \frac{a^2}{8} \text{ nên } V_{CMNP} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96} \text{ (đvtt)}$$



**BÀI 12 :** (ĐH B 2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

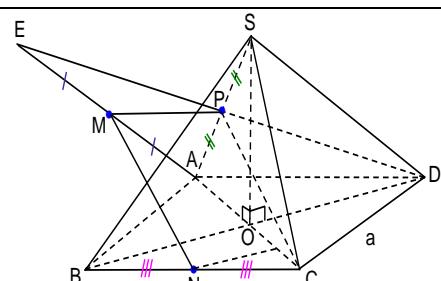
▪ Hướng dẫn :

Gọi P là trung điểm của SA. Ta có MNCP là hình bình hành nên MN song song với mặt phẳng (SAC).

Mặt khác,  $BD \perp (SAC)$  nên  $BD \perp MN$ . Vì  $MN \parallel (SAC)$  nên

$$d(MN; AC) = d(N; (SAC)) = \frac{1}{2} d(B; (SAC)) = \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(MN; AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$



**BÀI 13 :** (ĐH D 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, góc ABC = góc BAD = 90°, BA = BC = a, AD = 2a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA =  $a\sqrt{2}$  . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh  $\Delta SCD$  vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

▪ Hướng dẫn :

Gọi I là trung điểm của AD. Ta có :

$$IA = ID = IC = a \Rightarrow CD \perp AC$$

Mặt khác,  $CD \perp SA$  .

Suy ra  $CD \perp SC$  nên tam giác SCD vuông tại C. Trong tam giác vuông SAB ta có :

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$$

Gọi  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mặt phẳng (SCD)

$$\text{thì } \frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$$

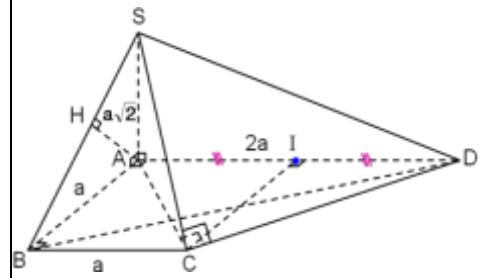
$$\text{Ta có : } d_1 = \frac{3V_{B,SCD}}{S_{SCD}} = \frac{SA \cdot S_{BCD}}{S_{SCD}}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}a^2$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2}SC \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} \cdot \sqrt{IC^2 + ID^2} = a^2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{a}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là :  $d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}$ .



**BÀI 14 :** (ĐH A 2008) Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC =  $a\sqrt{3}$  và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

▪ Hướng dẫn :

Gọi H là trung điểm của BC.

$$\text{Suy ra } A'H \perp (ABC) \text{ và } AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$$

$$\text{Do đó } A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$

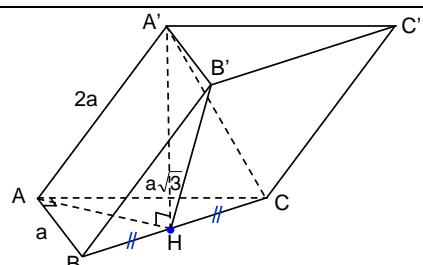
$$\text{Vậy } V_{A'ABC} = \frac{1}{3}A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{2} \text{ (dvtt)}$$

Trong tam giác vuông A'B'H có :

$$HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a \text{ nên tam giác B'BH cân tại B'}$$

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì  $\phi = B'\bar{B}H$ .

$$\text{Vậy } \cos \phi = \frac{a}{2 \cdot 2a} = \frac{1}{4}.$$



**BÀI 15 :** (ĐH B 2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA = a$ ,  $SB = a\sqrt{3}$  và mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo  $a$  thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

### **▪ *Hướng dẫn :***

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra  $SH \perp (ABCD)$ .

Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có :  $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$  nên tam giác SAB vuông tại S, suy ra  $SM = \frac{AB}{2} = a$ . Do đó  $\Delta SAM$  đều, suy ra  $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Diện tích tứ giác BMDN là  $S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp S.BMDN là  $V = \frac{1}{3}SH \cdot S_{BMDN} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$  (đvt)

Ké ME// DN ( $E \in AD$ ) suy ra  $AE = \frac{a}{2}$ .

Đặt  $\phi$  là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có :

$\text{goc}(\text{SM}, \text{ME}) = \emptyset$ .

Theo định lý ba đường vuông góc ta có :  $SA \perp AE$

$$\text{Suy ra } SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Tam giác SME cân tại E nên góc SME = φ và  $\cos \phi = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**BÀI 16** : (ĐH D 2008) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông,  $AB = BC = a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$ . Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

## **▪ Hướng dẫn :**

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B. Thể tích khối lăng trụ là  $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$  (đvtt)

Gọi E là trung điểm của BB'. Khi đó mặt phẳng (AME) song song với B'C nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C bằng khoảng cách giữa B'C và mặt phẳng (AME).

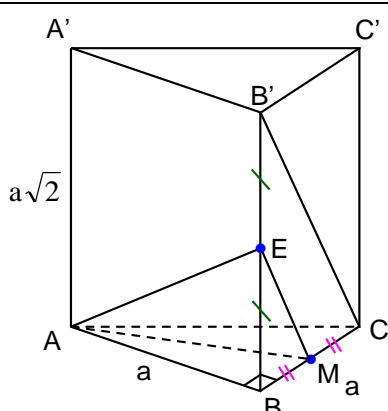
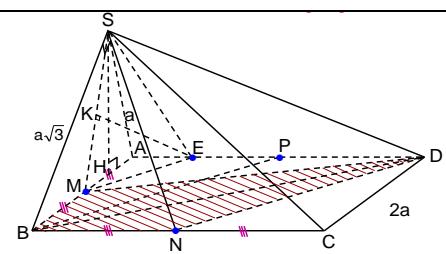
Nhận thấy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AME).

Gọi là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME).

Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đối nhau vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng B'C và AM bằng  $\frac{a\sqrt{7}}{7}$ .



**BÀI 17 :** (ĐH A 2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng  $60^\circ$ . Gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

▪ Hướng dẫn :

$(SIB) \perp (ABCD)$  và  $(SIC) \perp (ABCD)$ ; suy ra  $SI \perp (ABCD)$ .

Kẻ  $IH \perp BC$  ( $H \in BC$ )  $\Rightarrow BC \perp (SIH) \Rightarrow$  góc SHI =  $60^\circ$

Diện tích hình thang ABCD :  $S_{ABCD} = 3a^2$ .

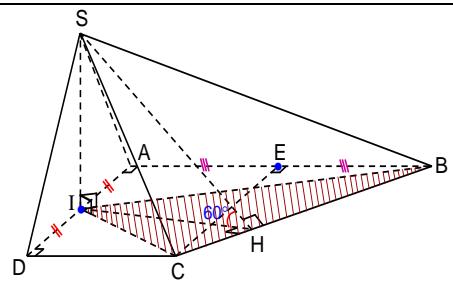
Tổng diện tích các tam giác ABI và CDI bằng  $\frac{3a^2}{2}$  ;

suy ra  $S_{\Delta ABC} = \frac{3a^2}{2}$

$$BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$$

$$\Rightarrow SH = IH \cdot \tan \hat{SKH} = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$$

Thể tích khối chóp S.ABCD :  $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SI = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$ .



**BÀI 18 :** (ĐH B 2009) Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng  $60^\circ$ ;  $\Delta ABC$  vuông tại C và góc BAC =  $60^\circ$ . Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của  $\Delta ABC$ . Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

▪ Hướng dẫn :

Gọi D là trung điểm AC và G là trọng tâm tam giác ABC, ta có  $B'G \perp (ABC) \Rightarrow$  góc  $B'BG = 60^\circ$

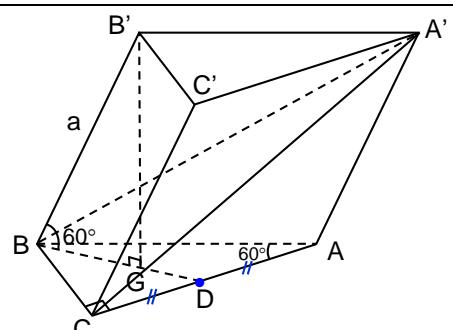
$$\Rightarrow B'G = B'B \cdot \sin B'\hat{B}G = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } BG = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = \frac{3a}{4}$$

$$\text{Tam giác ABC có : } BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow CD = \frac{AB}{4}$$

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3AB^2}{4} + \frac{AB^2}{16} = \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{13}}{13}, AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26}; S_{\Delta ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$$

Thể tích khối tứ diện A'ABC :  $V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3}B'G \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{9a^3}{208}$ .



**BÀI 19 :** (ĐH D 2009) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

▪ Hướng dẫn :

Hạ IH ⊥ AC ( $H \in AC$ )  $\Rightarrow IH \perp (ABC)$ ; IH là đường cao của tứ diện IABC  $\Rightarrow IH \parallel AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$

$$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC : S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = a^2$$

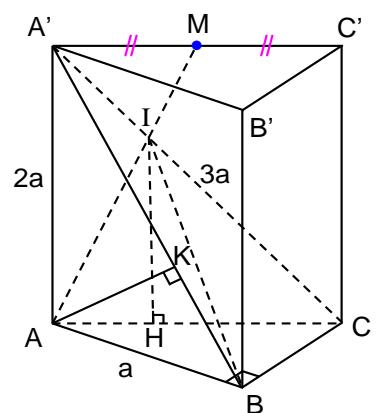
$$\text{Thể tích khối tứ diện IABC} : V = \frac{1}{3}IH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{4a^3}{9}$$

Hạ AK ⊥ A'B ( $K \in A'B$ ).

Vì  $BC \perp (ABB'A')$  nên  $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK.

$$AK = \frac{2S_{\Delta AAB'}}{A'B} = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$



**BÀI 20 :** (ĐH A 2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH ⊥ (ABCD) và SH =  $a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp S.CDMN và tính khoảng cách giữa DM và SC theo a.

▪ Hướng dẫn :

• Thể tích khối chóp S.CDNM :  $S_{CDNM} = S_{ABCD} - S_{AMN} - S_{BCM}$

$$S_{CDNM} = AB^2 - \frac{1}{2}AM \cdot AN - \frac{1}{2}BC \cdot BM = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

$$V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}S_{CDNM} \cdot SH = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$$

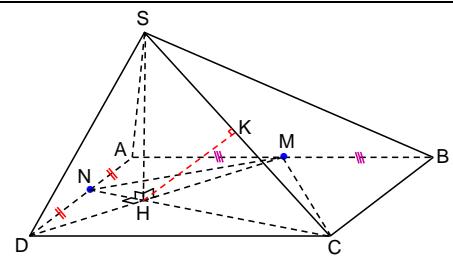
• Khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC

$\Delta ADM = \Delta DCN \Rightarrow \text{góc } ADM = \text{góc } DCN \Rightarrow DM \perp CN$ , kết hợp với  $DM \perp SH$ , suy ra  $DM \perp (SHC)$

Hạ HK ⊥ SC ( $K \in SC$ ), suy ra HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC, do đó :  $d(DM, SC) = HK$

$$\text{Ta có : } HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \text{ và } HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}},$$

$$\text{do đó : } d(DM, SC) = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$$



**BÀI 21 :** (ĐH B 2010) Cho lăng trụ tam giác đều  $A'B'C'$  có  $AB = a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(A'BC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\Delta A'BC$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $GABC$  theo  $a$ .

▪ Hướng dẫn :

- Thể tích khối lăng trụ

Gọi  $D$  là trung điểm  $BC$ , ta có :  $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp A'D$ , suy ra : góc  $ADA' = 60^\circ$

$$\text{Ta có : } AA' = AD \cdot \tan ADA' = \frac{3a}{2} ; S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Do đó : } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{8}$$

- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $GABC$

Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , suy ra :

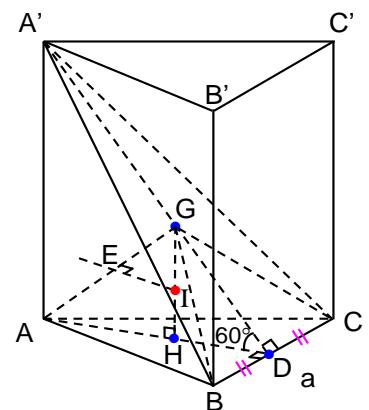
$$GH \parallel A'A \Rightarrow GH \perp (ABC)$$

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $GABC$ , ta có  $I$  là giao điểm của  $GH$  với trung trực của  $AG$  trong mặt phẳng  $(AGH)$ .

$$\text{Gọi } E \text{ là trung điểm } AG, \text{ ta có : } R = GI = \frac{GE \cdot GA}{GH} = \frac{GA^2}{2GH}$$

$$\text{Ta có : } GH = \frac{AA'}{3} = \frac{a}{2} ; AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} ; GA^2 = GH^2 + AH^2 = \frac{7a^2}{12}.$$

$$\text{Do đó : } R = \frac{7a^2}{2 \cdot 12} \cdot \frac{2}{a} = \frac{7a}{12}.$$



**BÀI 22 :** (ĐH D 2010) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = a$ ; hình chiếu vuông góc của đỉnh  $S$  trên  $(ABCD)$  là điểm  $H$  thuộc đoạn  $AC$ ,  $AH = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $CM$  là đường cao của  $\Delta SAC$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm của  $SA$  và tính thể tích khối tứ diện  $SMBC$  theo  $a$ .

▪ Hướng dẫn :

- $M$  là trung điểm  $SA$

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

$$HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}, SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = AC$$

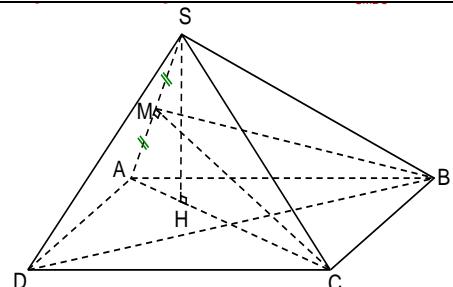
Do đó tam giác  $SAC$  cân tại  $C$ , suy ra  $M$  là trung điểm  $SA$ .

- Thể tích khối tứ diện  $SBCM$

$M$  là trung điểm  $SA$

$$\Rightarrow S_{SCM} = \frac{1}{2} S_{SCA} \Rightarrow V_{S.BCM} = V_{B.SCM} = \frac{1}{2} V_{B.SCA} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_{S.BCM} = \frac{1}{6} S_{ABC} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{14}}{48}$$



**BÀI 23 :** (ĐH A 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B,  $AB = BC = 2a$ ;  $(SAB)$  và  $(SAC)$  cùng vuông góc với  $(ABC)$ . Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính  $V_{S.BCNM}$  và  $d(AB ; SN)$  theo a.

▪ Hướng dẫn :

$(SAB)$  và  $(SAC)$  cùng vuông góc với  $(ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC)$

$AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow$  góc SBA là góc giữa  $(SBC)$  và  $(ABC)$

$$\Rightarrow \text{góc SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \tan SBA = 2a\sqrt{3}$$

Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N  $\Rightarrow MN \parallel BC$  và N là trung điểm AC

$$MN = \frac{BC}{2} = a, BM = \frac{AB}{2} = a$$

$$\text{Diện tích : } S_{BCNM} = \frac{(BC + MN)BM}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Thể tích : } V_{S.BCNM} = \frac{1}{3} S_{BCNM} \cdot SA = a^3 \sqrt{3}.$$

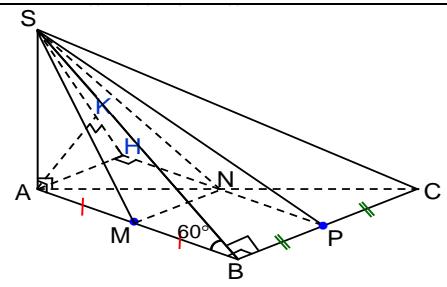
Kẻ đường thẳng  $\Delta$  đi qua N, song song với AB. Hẹ  $AD \perp \Delta$  ( $D \in \Delta$ )

$$\Rightarrow AB \parallel (SND) \Rightarrow d(AB, SN) = d(AB, (SND)) = d(A, (SND))$$

Hẹ  $AH \perp SD$  ( $H \in SD$ )  $\Rightarrow AH \perp (SND) \Rightarrow d(A, (SND)) = AH$

Tam giác SAD vuông tại A, có :  $AH \perp SD$  và  $AD = MN = a$

$$\Rightarrow d(AB, SN) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$



**BÀI 24 :** (ĐH B 2011) Cho lăng trụ ABCD.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> có đáy ABCD là hình chữ nhật.  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ . Hình chiếu vuông góc của điểm A<sub>1</sub> trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD<sub>1</sub>A<sub>1</sub>) và (ABCD) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và  $d(B_1, (A_1BD))$  theo a.

▪ Hướng dẫn :

Gọi O là giao điểm của AC và BD  $\Rightarrow A_1O \perp (ABCD)$

Gọi E là trung điểm AD  $\Rightarrow OE \perp AD$  và  $A_1E \perp AD$

$\Rightarrow$  góc  $A_1EO$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(ADD_1A_1)$  và  $(ABCD)$

$$\Rightarrow \text{góc } A_1EO = 60^\circ$$

$$\Rightarrow A_1O = OE \tan A_1EO = \frac{AB}{2} \tan A_1EO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

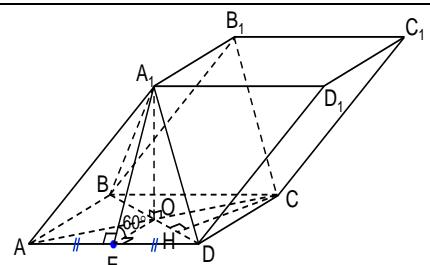
$$\text{Diện tích đáy : } S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích : } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot A_1O = \frac{3a^3}{2}$$

Ta có :  $B_1C \parallel A_1D \Rightarrow B_1C \parallel (A_1BD) \Rightarrow d(B_1, (A_1BD)) = d(C, (A_1BD))$

Hẹ  $CH \perp BD$  ( $H \in BD$ )  $\Rightarrow CH \perp (A_1BD) \Rightarrow d(C, (A_1BD)) = CH$

$$\text{Suy ra : } d(B_1, (A_1BD)) = CH = \frac{CD \cdot CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



**BÀI 25 :** (ĐH D 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a ; (SBC) vuông góc với (ABC). Biết SB =  $2a\sqrt{3}$  và góc SBC =  $30^\circ$ . Tính  $V_{S.ABC}$  và  $d(B, (SAC))$  theo a.

▪ Hướng dẫn :

Hạ SH  $\perp$  BC ( $H \in BC$ ) ;  $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$  ;

$$SH = SB \cdot \sin SBC = a\sqrt{3}$$

$$\text{Diện tích : } S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = 6a^2$$

$$\text{Thể tích : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = 2a^3\sqrt{3}$$

Hạ HD  $\perp$  AC ( $D \in AC$ ), HK  $\perp$  SD ( $K \in SD$ )

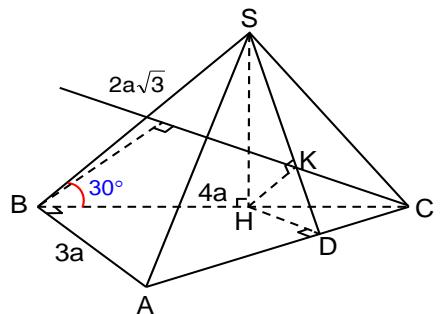
$$\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H, (SAC))$$

$$BH = SB \cdot \cos SBC = 3a \Rightarrow BC = 4HC \Rightarrow d(B, (SAC)) = 4 \cdot d(H, (SAC))$$

$$\text{Ta có : } AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 5a ;$$

$$HC = BC - BH = a \Rightarrow HD = BA \cdot \frac{HC}{AC} = \frac{3a}{5}$$

$$HK = \frac{SH \cdot HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}. \text{ Vậy, } d(B, (SAC)) = 4 \cdot HK = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$$



**BÀI 26 :** (ĐH A, A1 2012) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

▪ Hướng dẫn :

Ta có góc SCH là góc giữa SC và (ABC), suy ra  $\angle SCH = 60^\circ$

Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Ta có :

$$HD = \frac{a}{6}, CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}, SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

Kẻ Ax  $\parallel$  BC. Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN.

$$\text{Ta có : } BC \parallel (SAN) \text{ và } BA = \frac{3}{2} HA$$

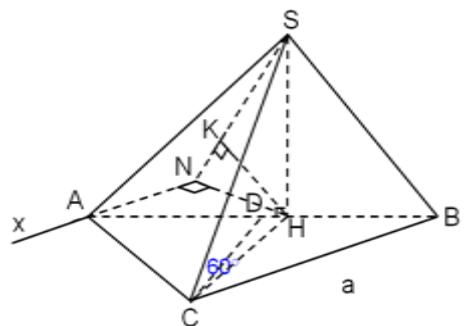
$$\text{nên } d(SA, BC) = d(B, (SAN)) = \frac{3}{2} d(H, (SAN))$$

Ta cũng có Ax  $\perp$  (SHN) nên Ax  $\perp$  HK. Do đó HK  $\perp$  (SAN).

Suy ra  $d(H, (SAN)) = HK$ .

$$AH = \frac{2a}{3}, HN = AH \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}, HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$



**BÀI 27 :** (ĐH B 2012) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a, AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC ⊥ (ABH). Tính thể tích của khối chóp S.ABH theo a.

▪ Hướng dẫn :

Gọi D là trung điểm của cạnh AB và O là tâm của ΔABC.

Ta có : AB ⊥ CD và AB ⊥ SO nên AB ⊥ (SCD), do đó AB ⊥ SC.

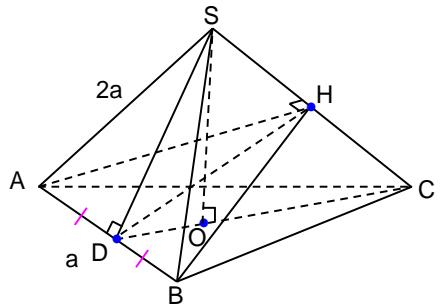
Mặt khác : SC ⊥ AH, suy ra SC ⊥ (ABH).

$$\text{Ta có : } CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ nên } SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

$$\text{Do đó : } DH = \frac{SO \cdot CD}{SC} = \frac{a\sqrt{11}}{4} \Rightarrow S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{\sqrt{11}a^2}{8}.$$

$$\text{Ta có : } SH = SC - HC = SC - \sqrt{CD^2 - DH^2} = \frac{7a}{4}.$$

$$\text{Do đó : } V_{S.ABH} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABH} = \frac{7\sqrt{11}a^3}{96}.$$



**BÀI 28 :** (ĐH D 2012) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, ΔA'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích của khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến (BCD') theo a.

▪ Hướng dẫn :

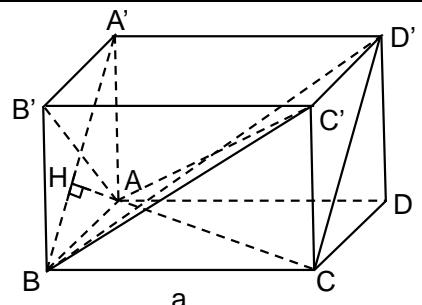
ΔA'AC vuông cân tại A và A'C = a nên A'A = AC =  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ . Do đó :

$$AB = B'C' = \frac{a}{2}. \text{ Ta có : } V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} B'C' \cdot S_{\Delta ABB'} = \frac{1}{6} B'C' \cdot AB \cdot BB' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của ΔA'AB.

Ta có : AH ⊥ A'B' và AH ⊥ BC nên AH ⊥ (A'BC), nghĩa là AH ⊥ (BCD'). Do đó : AH = d(A, (BCD')). Ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{6}{a^2}. \text{ Do đó } d(A, (BCD')) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



**BÀI 29 :** (ĐH A, A1 2013) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A. góc ABC bằng  $30^\circ$ , SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

▪ Hướng dẫn :

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra SH ⊥ BC. Mà (SBC) vuông góc với (ABC) theo giao tuyến BC, nên SH ⊥ (ABC). Ta có : BC = a,

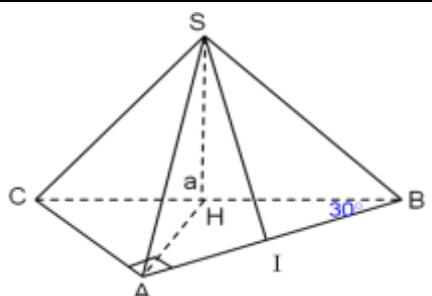
$$\text{suy ra } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AC = BC \sin 30^\circ = \frac{a}{2}; AB = BC \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{a^3}{16}$$

Tam giác ABC vuông tại A và H là trung điểm của BC nên HA = HB. Mà SH ⊥ (ABC), suy ra SA = SB = a. Gọi I là trung điểm

$$\text{của AB, suy ra SI} \perp \text{AB. Do đó } SI = \sqrt{SB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

$$\text{Suy ra } d(C, (SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{6V_{S.ABC}}{SI \cdot AB} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$



**BÀI 30 :** (ĐH B 2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo  $a$  thể tích của khối chóp SABCD và  $d(A, (SCD))$ .

▪ Hướng dẫn :

Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ , suy ra  $SH \perp AB$  và  $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

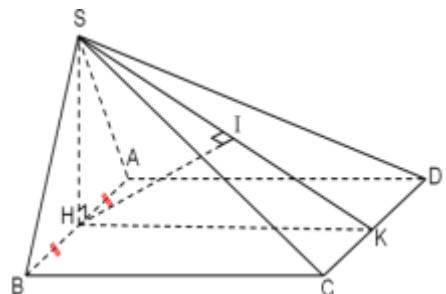
Mà  $(SAB)$  vuông góc với  $(ABCD)$  theo giao tuyến  $AB$ , nên  $SH \perp (ABCD)$ . Do đó  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$

Do  $AB \parallel CD$  và  $H \in AB$  nên  $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $CD$  và  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $SK$ . Ta có  $HK \perp CD$ .

Mà  $SH \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HI$ . Do đó  $HI \perp (SCD)$ .

Suy ra  $d(A, (SCD)) = HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .



**BÀI 31 :** (ĐH D 2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh  $a$ , cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc BAD bằng  $120^\circ$ . Gọi M là trung điểm của BC và góc SMA bằng  $45^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến  $(SBC)$ .

▪ Hướng dẫn :

Góc  $BAD = 120^\circ \Rightarrow$  góc  $ABC = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC$  đều  $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

$\Delta SAM$  vuông tại A có góc  $SMA = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta SAM$  vuông cân tại A  $\Rightarrow SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{4}$

Do  $AD \parallel BC$  nên  $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

Ta có  $AM \perp BC$  và  $SA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

Ta có  $AH = \frac{AM\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ , suy ra  $d(D, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

